Sammlung Schubert LIX

Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen

Von

Dr. A. Wangerin
Professor an der Universitat Halle a. S.

II. Band

Mit 17 Figuren

Berlin und Leipzig
Vereinigung wissenschaftlicher Verleger
Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.
1921

Druck von C. G. Röder G. m. b. H., Leipzig. 813020.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Seite

Die wichtigsten Eigenschaften der Kugelfunktionen.

II. Abschnitt.

Die Potentialaufgaben für die Kugel. Elektrizitätsverteilung auf einer Kugel.

III. Abschnitt.

Die Potentialaufgaben für Rotationsellipsoide und exzentrische Kugeln.

IV. Abschnitt.

Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie für beliebige geschlossene Flächen.

Druckfehlerverzeichnis zum I. Bande.

Seite 46, Zeile 6 von unten muß es heißen ζ statt ζ_1.

„ 51,	in Formel (11)	„ „ „	$\left[1-\frac{3x^2}{r^2}\right]$	statt $\left[1-\frac{x^2}{r^2}\right]$
„ 62,	„ „ (2a)	„ „ „	$d\eta\, d\zeta$	statt $d\eta\, d\xi$.
„ 106,	„ „ (15b)	„ „ „	R^3	„ R^2.
„ 108,	Zeile 15 von unten	„ „ „	A	„ P.
„ 109,	„ 7 „ „	„ „ „	$\sqrt{(R-r)^2}$	statt $\sqrt{(R-r^2)}$.
„ 149,	„ 14 „ „	„ „ „	Potentials	„ Potential
„ 152,	„ 14 „ oben	„ „ „	$\varkappa' do'$	„ $\varkappa do'$.
„ 154,	„ 5 „ „	„ „ „	$\cos(N, \zeta)$	„ $\cos(N, \xi)$.
„ 165,	„ 8 „ unten	„ „ „	bleiben	„ hleiben.

„ 184, in Formel (12) ist das eine $d\varphi$ zu tilgen.

„ 191, in Figur 30 ist das obere P durch P' zu ersetzen.

„ 211, „ Formel (24) muß es heißen $\lambda(9+2\lambda^2)$ statt $\lambda(9+2\lambda^2$.

„ 223, „ „ (14) „ „ „ $[\zeta-\delta\cos(N,\zeta)]^2$ statt $[\zeta-\delta\cos(N,\zeta)]$.

„ 248, „ „ (16c) „ „ „ $c\pi(a^2-c^2)$ statt $a^2 c\pi(a^2-c^2)$.

I. Abschnitt.

Die wichtigsten Eigenschaften der Kugelfunktionen.

Kapitel 1.

Transformation des Laplaceschen Differentialausdrucks auf beliebige orthogonale Koordinaten.

Die allgemeine Behandlung von Aufgaben der Potentialtheorie, welche Massen betreffen, die von konzentrischen Kugelflächen begrenzt oder auf Kugelflächen verteilt sind, stützt sich auf die Eigenschaften gewisser Funktionen, der sogenannten Kugelfunktionen. Auf diese wird man geführt, wenn man die auf räumliche Polarkoordinaten transformierte Laplacesche Differentialgleichung durch eine Reihe integriert. Wir beginnen demgemäß damit, den Laplaceschen Ausdruck

(1) $$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

auf räumliche Polarkoordinaten zu transformieren. Wir fassen diese Aufgabe etwas allgemeiner und formen ΔV für den Fall um, daß an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z beliebige krummlinige, aber orthogonale Koordinaten treten.

Dazu denken wir die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines Punktes durch drei neue Variable λ, μ, ν ausgedrückt:

(2) $$x = f(\lambda, \mu, \nu), \quad y = \varphi(\lambda, \mu, \nu), \quad z = \psi(\lambda, \mu, \nu).$$

Die Bedeutung der neuen Veränderlichen ist folgende. Denkt man aus den Gleichungen (2) μ und ν eliminiert, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$F(x, y, z, \lambda) = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung stellt, wenn man der Größe λ einen bestimmten Wert erteilt, eine Fläche dar, für einen andern Wert von λ eine andere Fläche. Für beliebige veränderliche λ stellt somit (3) eine Flächenschar mit dem Parameter λ dar. Ebenso kann man aus (2) λ, ν oder auch λ, μ eliminieren und erhält so Gleichungen der Form

$$\text{(3a)} \quad \Phi(x, y, z, \mu) = 0, \qquad \text{(3b)} \quad \Psi(x, y, z, \nu) = 0,$$

d. h. man erhält zwei neue Flächenscharen mit den Parametern μ, resp. ν. Bestimmt man die Lage eines Punktes durch die diesem Punkte zugehörigen Werte von λ, μ, ν, so wird nach dem Gesagten der Punkt als Schnittpunkt dreier Flächen dargestellt, die je einer der Scharen (3), (3a), (3b) angehören. Man bezeichnet λ, μ, ν als die krummlinigen Koordinaten des betrachteten Punktes. In dem Fall räumlicher Polarkoordinaten (s. Bd. I, S. 18) wird eine der Flächenscharen aus konzentrischen Kugeln gebildet, die zweite aus Rotationskegeln mit gleichem Scheitel, gleicher Achse, aber verschiedener Kegelöffnung, die dritte Schar aus Ebenen, die sämtlich durch die Kegelachse gehen. Hier wird jede der drei Flächen, die die Lage eines Punktes bestimmen, von den beiden andern Flächen senkrecht geschnitten, d. h. die krummlinigen Koordinaten sind in diesem Falle orthogonal.

Wir wollen nun zunächst untersuchen, unter welchen Bedingungen auch die allgemeinen krummlinigen Koordinaten λ, μ, ν orthogonal sind, d. h. unter welchen Bedingungen jede der Flächen einer der drei Scharen (3), (3a), (3b) von den Flächen der beiden andern Scharen senkrecht geschnitten wird. Zu dem Zwecke betrachten wir neben dem Punkte P, dessen rechtwinklige Koordinaten x, y, z und dessen krummlinige Koordinaten λ, μ, ν sind, drei andere Punkte P_1, P_2, P_3, die derart liegen, daß zum Punkte P_1 mit den rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1, z_1 die Parameterwerte $\lambda + \delta\lambda, \mu, \nu$, zu P_2 (x_2, y_2, z_2) die

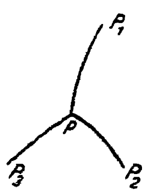

Fig. 1

Parameterwerte $\lambda, \mu + \delta\mu, \nu$, zu $P_3(x_3, y_3, z_3)$ die Werte $\lambda, \mu, \nu + \delta\nu$ gehören; darin sollen $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$ kleine Größen sein. Nach (2) ist

(2a) $x_1 = f(\lambda+\delta\lambda, \mu, \nu),\ y_1 = \varphi(\lambda+\delta\lambda, \mu, \nu),\ z_1 = \psi(\lambda+\delta\lambda, \mu, \nu).$

Der Abstand der Punkte P, P_1 ist, wenn man nach Potenzen von $\delta\lambda$ entwickelt und nur die erste Potenz beibehält,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \overline{PP_1} &= \sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2} \\ &= \delta\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)^2} = \delta\lambda \,.\, l, \end{aligned}\right.$$

und die Richtungskosinus von PP_1 sind

$$\frac{x_1-x}{\overline{PP_1}},\ \frac{y_1-y}{\overline{PP_1}},\ \frac{z_1-z}{\overline{PP_1}}.$$

Für unendlich kleine $\delta\lambda = d\lambda$ wird

$$(4a)\qquad \overline{PP_1} = l\,.\,d\lambda,$$

und die Richtungskosinus von $\overline{PP_1}$ werden

$$(5)\qquad \frac{1}{l}\frac{\partial x}{\partial\lambda},\ \frac{1}{l}\frac{\partial y}{\partial\lambda},\ \frac{1}{l}\frac{\partial z}{\partial\lambda}.$$

Die gleiche Betrachtung ergibt für die Punkte P_2, P_3, wenn $\delta\mu$ unendlich klein $= d\mu$, ebenso $\delta\nu = d\nu$ ist;

$$(4b)\qquad \overline{PP_2} = m\,d\mu,\ PP_3 = n\,d\nu,$$

wo

$$(4c)\ m = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)^2},\ n = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\nu}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\nu}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)^2}$$

ist; ferner sind die Richtungskosinus

$$(5a)\quad \left\{\begin{aligned} &\text{von } \overline{PP_2} \quad \frac{1}{m}\frac{\partial x}{\partial\mu},\ \frac{1}{m}\frac{\partial y}{\partial\mu},\ \frac{1}{m}\frac{\partial z}{\partial\mu}, \\ &\text{von } \overline{PP_3} \quad \frac{1}{n}\frac{\partial x}{\partial\nu},\ \frac{1}{n}\frac{\partial y}{\partial\nu},\ \frac{1}{n}\frac{\partial z}{\partial\nu}. \end{aligned}\right.$$

Da zu dem Punkte P_1 dieselben Werte der Parameter μ, ν gehören wie zu P, so gehen diejenigen Flächen der Scharen (3a), (3b), die zur Bestimmung von P dienen, auch

durch P_1, $\overline{PP_1}$ ist daher ein Bogenelement der Schnittlinie der beiden in Rede stehenden Flächen. Ebenso ist $\overline{PP_2}$ ein Bogenelement der Schnittlinie der durch P gehenden Flächen der Scharen (3) und (3b), $\overline{PP_3}$ endlich ein Element der Schnittkurve der durch P gehenden Flächen der Scharen (3) und (3a). Soll jede Fläche der einen Schar von den Flächen der andern Scharen senkrecht geschnitten werden, so müssen auch die Schnittkurven der Flächen aufeinander, d. h. jede der Linien $\overline{PP_1}$, $\overline{PP_2}$, $\overline{PP_3}$ muß auf den beiden andern senkrecht stehen. Es muß daher die Summe der Produkte des entsprechenden Richtungskosinus verschwinden, also

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\dfrac{\partial x}{\partial \mu}+\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}\dfrac{\partial y}{\partial \mu}+\dfrac{\partial z}{\partial \lambda}\dfrac{\partial z}{\partial \mu}=0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\dfrac{\partial x}{\partial \nu}+\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}\dfrac{\partial y}{\partial \nu}+\dfrac{\partial z}{\partial \lambda}\dfrac{\partial z}{\partial \nu}=0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \mu}\dfrac{\partial x}{\partial \nu}+\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\dfrac{\partial y}{\partial \nu}+\dfrac{\partial z}{\partial \mu}\dfrac{\partial z}{\partial \nu}=0; \end{cases}$$

und diese Bedingungen müssen für alle Punkte des Raumes, d. h. für beliebige Werte von λ, μ, ν erfüllt sein. Die Gleichungen (6) stellen die Bedingungen dafür dar, daß unsere drei Flächenscharen ein orthogonales System bilden, oder daß die krummlinigen Koordinaten λ, μ, ν orthogonal sind.

Diese Bedingungen (6) nehmen wir im folgenden als erfüllt an. Ein Volumenelement des Raumes erhalten wir nun, indem wir von jeder der drei Flächenscharen (3), (3a), (3b) je zwei unendlich nahe Flächen nehmen, denen die Parameter λ und $\lambda + d\lambda$, resp. μ und $\mu + d\mu$, sowie ν und $\nu + d\nu$ angehören. Die bei P liegenden Teile dieser Flächen begrenzen ein Raumelement, das nahezu die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipedons (Fig. 2) hat, von dem $\overline{PP_1}$, $\overline{PP_2}$, $\overline{PP_3}$ drei anstoßende Kanten sind. Die drei in P zusammenstoßenden Grenzflächen des Elements haben, da $\overline{PP_1}$, $\overline{PP_2}$, $\overline{PP_3}$ sich senkrecht schnei-

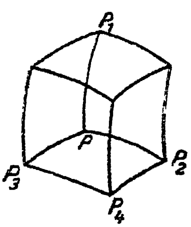

Fig. 2

den, resp. den Flächeninhalt $\overline{PP_2}\,.\,\overline{PP_3} = m\,n\,d\mu\,d\nu$, $\overline{PP_1}\,.\,\overline{PP_3} = l\,n\,d\lambda\,d\nu$, $\overline{PP_1}\,.\,\overline{PP_2} = l\,m\,d\lambda\,d\mu$, und das Volumen des Elements ist

$$dv = PP_1 \cdot PP_2 \cdot PP_3 = l\,m\,n\,d\lambda\,d\mu\,d\nu. \tag{7}$$

Wir betrachten nun einen Raum, der begrenzt wird von zwei beliebigen Flächen der Schar (3), zwei Flächen der Schar (3a) und zwei Flächen der Schar (3b). Auf diesen Raum wenden wir den Greenschen Satz an [Bd. I, S. 96, (Gl. 1)], indem wir $U = 1$, $W = V$ nehmen, wo V das Potential irgendwelcher Massen ist, die so liegen, daß die zweiten Ableitungen von V innerhalb des Integrationsgebiets bestimmte endliche Werte haben; so ist, wenn wir für dv den Ausdruck (7) benutzen

$$\iiint \Delta V\, l\,m\,n\,d\lambda\,d\mu\,d\nu = \iint \frac{\partial V}{\partial N}\,do. \tag{8}$$

Darin ist das dreifache Integral uber das Volumen, das Doppelintegral über die gesamte Oberfläche des Integrationsraumes zu erstrecken. Wir verkleinern dann das Integrationsgebiet dadurch, daß wir die derselben Schar angehörenden beiden Grenzflächen einander immer näherrücken, bis sie schließlich einander unendlich nahe sind. Machen wir das mit allen drei Paaren von Grenzflächen, so reduziert sich schließlich das Integrationsgebiet auf ein Volumenelement, die linke Seite von (8) auf

$$\Delta V\, l\,m\,n\,d\lambda\,d\mu\,d\nu, \tag{8a}$$

während die Oberfläche des Integrationsgebiets aus den sechs Grenzflächen des Volumenelements besteht, so daß die rechte Seite von (8) im Grenzfall in eine Summe aus sechs Summanden ubergeht. Wir untersuchen die einzelnen Summanden dieser Summe. Für die Fläche $PP_2P_4P_3$ (Fig. 2) ist $do = \overline{PP_2} \cdot \overline{PP_3} = m\,n\,d\mu\,d\nu$. Ferner steht $\overline{PP_1}$ auf do senkrecht, aber da in (8) dN die äußere Normale des Integrationsraumes darstellt, hat für die Fläche $PP_2P_4P_3$ dN die entgegengesetzte Richtung von PP_1, d. h es ist $dN = -\overline{PP_1} = -l\,d\lambda$. Demnach ist $\frac{\partial V}{\partial N}\,do$, für die Fläche $PP_2P_4P_3$ gebildet,

$$= -\frac{mn}{l} d\mu\, d\nu \frac{\partial V}{\partial \lambda}.$$

Für die gegenüberliegende Fläche ist alles ebenso, nur hat hier dN die entgegengesetzte Richtung, ist also $= + l \cdot d\lambda$, und zugleich tritt an Stelle von λ der Wert $\lambda + d\lambda$. Die Summe der für diese beiden Flächen gebildeten Ausdrücke $\frac{\partial V}{\partial N} do$ ist somit

$$\left(-\frac{mn}{l} d\mu\, d\nu \frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)_\lambda + \left(\frac{mn}{l} d\mu\, d\nu \frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)_{\lambda + d\lambda},$$

d. h. da μ, ν von λ unabhängig sind und

$$f(\lambda + d\lambda) - f(\lambda) = \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda$$

ist, jene Summe wird

$$\frac{\partial \left(\frac{mn}{l} \frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)}{\partial \lambda} d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich, wenn man $\frac{\partial V}{\partial N} do$ für die beiden andern Paare gegenüberliegender Flächen des Volumenelements bildet; man hat, um diese zu erhalten, nur λ mit μ, resp. ν und zugleich l mit m, resp. n zu vertauschen. Im Grenzfall geht daher die rechte Seite von (8) in folgenden Ausdruck über:

$$\text{(8b)} \quad \left\{\frac{\partial \left(\frac{mn}{l} \frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \left(\frac{ln}{m} \frac{\partial V}{\partial \mu}\right)}{\partial \mu} + \frac{\partial \left(\frac{lm}{n} \frac{\partial V}{\partial \nu}\right)}{\partial \nu}\right\} d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Da die Gleichung (8) bei beliebiger Verkleinerung des ursprünglich ins Auge gefaßten Integrationsraums gültig bleibt, so gilt sie auch für den Grenzfall, d. h. die Ausdrücke (8a) und (8b) sind einander gleich, oder es ist

$$\text{(9)} \quad \Delta V = \frac{1}{lmn} \left\{\frac{\partial \left(\frac{mn}{l} \frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \left(\frac{nl}{m} \frac{\partial V}{\partial \mu}\right)}{\partial \mu} + \frac{\partial \left(\frac{lm}{n} \frac{\partial V}{\partial \nu}\right)}{\partial \nu}\right\}.$$

Wenden wir das Resultat auf räumliche Polarkoordinaten an, für die

$$(10)\qquad x = r \sin\vartheta \cos\varphi\,,\ y = r \sin\vartheta \sin\varphi\,,\ z = r\cos\vartheta$$

ist, so sind, wenn $r = \lambda$, $\vartheta = \mu$, $\varphi = \nu$ gesetzt wird, die Orthogonalitätsbedingungen (6) erfüllt. Ferner wird

$$(11)\qquad \begin{cases} l = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1\,, \\ m = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \vartheta}\right)^2} = r\,, \\ n = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r\sin\vartheta\,, \end{cases}$$

daher

$$(12)\qquad \begin{cases} \Delta V = \dfrac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left\{\dfrac{\partial\left(r^2 \sin\vartheta \dfrac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} + \dfrac{\partial\left(\sin\vartheta \dfrac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)}{\partial \vartheta} + \dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}\right)}{\partial \varphi}\right\} \\ \quad = \dfrac{1}{r^2}\left\{\dfrac{\partial\left(r^2 \dfrac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} + \dfrac{1}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial\left(\sin\vartheta \dfrac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)}{\partial \vartheta} + \dfrac{1}{\sin^2\vartheta}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right\}, \end{cases}$$

da ϑ von r und φ unabhängig ist.

Für Zylinderkoordinaten, die man erhält, wenn man in der xy-Ebene Polarkoordinaten einführt, während die dritte Koordinate z bleibt, so daß

$$(10^1)\qquad x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi\,,\ z = z$$

ist, sind ebenfalls die Bedingungen (6) erfüllt, und es wird, wenn $\lambda = r$, $\mu = \varphi$, $\nu = z$ gesetzt wird,

$$(11^1)\qquad l = 1\,,\ m = r\,,\ n = 1\,,$$

somit

$$(12^1)\qquad \Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\dfrac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Weitere Anwendungen der Formel (9) werden im III. Abschnitt folgen.

Kapitel 2

Die einfache Kugelfunktion erster Art.

a) Definition der Kugelfunktion $P_n(x)$.

Ehe wir an die Integration der auf räumliche Polarkoordinaten transformierten Gleichung $\Delta V = 0$ [s. Gl. (12), S. 7] gehen, behandeln wir einen speziellen Fall. Wir stellen uns die Aufgabe, die reziproke Entfernung zweier Punkte P, Q durch die räumlichen Polarkoordinaten dieser Punkte auszudrücken und dann in eine Reihe zu entwickeln. Die rechtwinkligen Koordinaten von P seien x, y, z, die von Q ξ, η, ζ, ihre Polarkoordinaten r, ϑ, φ, resp. $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$. Zwischen x, y, z und r, ϑ, φ bestehen die Gleichungen (10) S. 7, und analoge Beziehungen bestehen zwischen ξ, η, ζ und $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$. Aus diesen Beziehungen folgt, wenn ϱ den Abstand $\overline{PQ}$ bezeichnet,

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} \varrho^2 &= (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \\ &= r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 [\cos\vartheta \cos\vartheta_1 + \sin\vartheta \sin\vartheta_1 \cos(\varphi - \varphi_1)]. \end{aligned}$$

Der Faktor von $-2 r r_1$ ist gleich dem Kosinus des Winkels γ, den r und r_1 miteinander bilden,

$$\text{b)}\qquad \cos\gamma = \cos\vartheta \cos\vartheta_1 + \sin\vartheta \sin\vartheta_1 \cos(\varphi - \varphi_1);$$

denn r, r_1, ϱ sind die drei Seiten des Dreiecks OPQ [O der Anfangspunkt der Koordinaten].*) Indem wir vorläufig von dem Zusammenhang zwischen γ und $\vartheta, \varphi, \vartheta_1, \varphi_1$ absehen, wird unsere Aufgabe sich dahin vereinfachen, den Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos\gamma}}$$

---

*) Die Gleichung für $\cos\gamma$ ist übrigens nichts anderes als die Grundformel der sphärischen Trigonometrie, angewandt auf das Dreieck zAB, das man erhält, wenn man um O eine Kugel mit dem Radius 1 beschreibt, mit z, A, B die Punkte bezeichnet, in denen die z-Achse, OP, OQ die Kugel schneiden, und je zwei dieser Punkte durch größte Kugelkreise verbindet. Die Seiten dieses sphärischen Dreiecks sind $zA = \vartheta$, $zB = \vartheta_1$, $AB = \gamma$, während der Winkel $AzB = \varphi - \varphi_1$ oder $= \varphi_1 - \varphi$ ist.

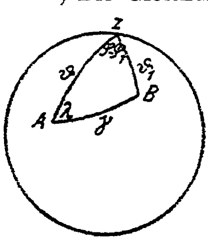

Fig 3.

in eine Reihe zu entwickeln, und zwar in eine nach steigenden oder fallenden Potenzen von r fortschreitende Reihe, je nachdem $r < r_1$ oder $r > r_1$ ist.

Für den Fall $r < r_1$ schreiben wir

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r_1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2r}{r_1}\cos\gamma + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2}},$$

im Falle $r > r_1$ aber

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2r_1}{r}\cos\gamma + \left(\frac{r_1}{r}\right)^2}}$$

und haben dann beide Male einen Ausdruck von der Form

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2a\cos\gamma + a^2}},$$

in dem a positiv und kleiner als 1 ist, nach steigenden Potenzen von a zu entwickeln. Die so vereinfachte Aufgabe verallgemeinern wir insofern, als wir den Kosinus des reellen Winkels γ durch eine beliebige reelle oder auch komplexe Größe x ersetzen, ebenso a beliebig nehmen und nur durch die gleich zu erorternde Bedingung beschränken.

Es ist somit der Ausdruck

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - 2ax + a^2}}$$

nach steigenden Potenzen von a zu entwickeln. Den Koeffizienten von a^n bei dieser Entwicklung nennen wir die n-te Kugelfunktion von x und bezeichnen sie mit $P_n(x)$, so daß wir haben

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - 2ax + a^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n P_n(x).$$

Zur Unterscheidung von anderen, spater zu untersuchenden Funktionen wollen wir $P_n(x)$ als Kugelfunktion erster Art mit einer Veränderlichen oder als einfache Kugelfunktion erster Art bezeichnen. Vielfach werden

diese Funktionen auch „Legendresche Polynome“ oder „Legendresche Koeffizienten“ genannt oder auch „zonale harmonische Funktionen“ oder „einachsige harmonische Funktionen“. x ist das Argument, n der Index der Kugelfunktion.

Es ist zunächst zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Entwicklung der linken Seite von (1) nach steigenden Potenzen von α zulässig ist. Zu dem Zwecke zerlegen wir den Radikand in Faktoren und schreiben

$$\text{(1a)} \qquad \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$$
$$=\left[1-\alpha\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[1-\alpha\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Wenden wir auf jeden der Faktoren den binomischen Satz an, so ist zur Konvergenz der entstehenden Reihen erforderlich, daß

$$\left|\alpha\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\right|<1 \text{ und } \left|\alpha\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right|<1$$

ist, falls, wie üblich, $|m|$ den absoluten Wert von m bezeichnet. Diese Bedingungen können wir auch schreiben.

$$|\alpha|<\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| \text{ und } |\alpha|<\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|,$$

d. h. $|\alpha|$ muß kleiner sein als der kleinere der absoluten Werte von $x-\sqrt{x^2-1}$ und $x+\sqrt{x^2-1}$. Durch passende Wahl von α kann man also für jedes gegebene x erreichen, daß die Reihen, die sich aus dem binomischen Satze für die Faktoren der rechten Seite von (1a) ergeben, konvergieren, und das Gleiche gilt dann auch für das Produkt der beiden Reihen.

Für den Fall, daß x der Kosinus eines reellen Winkels ist, $x=\cos\gamma$, ist

$$x\pm\sqrt{x^2-1}=e^{\pm i\gamma},$$

der absolute Wert von $x\pm\sqrt{x^2-1}$ ist daher 1, und falls $|\alpha|<1$, konvergiert unsere Entwicklung. Aus (1) folgt somit folgende Reihe für die reziproke Entfernung $1/\varrho$ zweier Punkte. Es ist

$$
(2) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{1}{r_1} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{r^n}{r_1^{\,n+1}} P_n(\cos\gamma), \text{ falls } r < r_1, \\ \dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{1}{r} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{r_1^{\,n}}{r^{n+1}} P_n(\cos\gamma), \text{ falls } r > r_1 \end{cases}
$$

b) Analytischer Ausdruck fur $P_n(x)$

Wir schreiben

$$
\frac{1}{\sqrt{1-2ax+a^2}} = [1 - a(2x-a)]^{-\frac{1}{2}}
$$

und entwickeln die rechte Seite nach dem binomischen Satze, so ergibt sich

$$
(3) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2ax+a^2}} = 1 + \frac{1}{2}a(2x-a) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}a^2(2x-a)^2 + \\ + \frac{1\cdot 3\,..\,(2k'-1)}{2\cdot 4\,..\,(2k')} a^{k'}(2x-a)^{k'} + \;.\;.
$$

und diese Reihe konvergiert unter den oben erorterten Bedingungen. Auf der rechten Seite von (3) entwickle man in jedem Gliede $(2x-a)^{k'}$ nach dem binomischen Satze für ganze Exponenten und fasse alle gleichen Potenzen von a zusammen. Um den sich ergebenden Koeffizienten von a^n zu erhalten, erwäge man, daß $a^{k'}(2x-a)^{k'}$, nach Potenzen von a entwickelt, die Potenzen von $a^{k'}$ bis $a^{2k'}$ enthält. Soll dies Glied einen Beitrag zum Faktor von a^n geben, so muß k' zwischen n und $\frac{1}{2}n$ liegen. Nun ist der Koeffizient von a^n

für $k' = n$ $\qquad \dfrac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\,..\,2n}(2x)^n,$

für $k' = n-1$ $\qquad -\dfrac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\,..\,(2n-2)}\dfrac{n-1}{1}(2x)^{n-2},$

für $k' = n-2$ $\qquad +\dfrac{1\cdot 3\ldots(2n-5)}{2\cdot 4\,..\,(2n-4)}\dfrac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}(2x)^{n-4},$

$$\text{für } k' = n - k \quad (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-2k-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2n-2k)}$$
$$\cdot \frac{(n-k)(n-k-1)\ldots(n-2k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k} (2x)^{n-2k},$$

und k darf höchstens $\frac{1}{2} n$ sein. Faßt man die Koeffizienten aller Glieder, die den Faktoren x^n enthalten, zusammen, so erhält man $P_n(x)$. Dabei möge noch der Koeffizient der höchsten Potenz von x herausgesetzt werden, so wird:

$$(4)\quad P_n(x) = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{n!} \Big\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \ldots$$
$$+ (-1)^k \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2k+1)}{2 \cdot 4 \ldots 2k (2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)} x^{n-2k} + \ldots \Big\}.$$

Dabei ist, wie üblich, $n!$ für $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ gesetzt.

Die Reihe (4) bricht von selbst ab. Der letzte Summand innerhalb der Klammer ist

$$\text{für gerade } n \quad (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{2 \cdot 4 \ldots n (2n-1)(2n-3)\ldots(n+1)},$$

$$\text{für ungerade } n \quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n(n-1)\ldots 2}{2 \cdot 4 \ldots (n-1)(2n-1)(2n-3)\ldots(n+2)} x.$$

$P_n(x)$ ist also eine ganze rationale Funktion von x, die für gerade n nur gerade, für ungerade n nur ungerade Potenzen von x enthält, so daß allgemein

$$(5)\qquad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

ist. Ferner ist

$$(6)\quad \begin{cases} P_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \dfrac{1 \cdot 3 \ldots (n-1)}{2 \cdot 4 \ldots n},\ P_n'(0) = 0 \text{ für gerade } n, \\[2ex] \bar{P}_n(0) = \left(\dfrac{P_n(x)}{x}\right)_{x=0} = P_n'(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{1 \cdot 3 \ldots n}{2 \cdot 4 \ldots (n-1)} \text{ für ungerade } n, \end{cases}$$

falls $P_n'(x)$ die Ableitung von $P_n(x)$ bezeichnet. Ferner folgt aus (4)

$$\lim_{x=\infty} \frac{P_n(x)}{x^n} = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{n!} \tag{7}$$

Setzt man in (1) (S. 9) $x = 1$, so folgt

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \sum_1^\infty \alpha^n P_n(1),$$

und da andererseits

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \sum_1^\infty \alpha^n$$

ist, so hat man

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n. \tag{8}$$

Für die einfachsten Werte des Index n ergeben sich folgende Ausdrücke, deren erster daraus folgt, daß der Koeffizient von $\alpha^0 = 1$ ist:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right), \tag{4a}$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right), \quad P_4(x) = \frac{35}{8}\left(x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}\right).$$

In diesen einfachen Fällen erkennt man, daß nach Auflösen der Klammern die Nenner der Koeffizienten aller Glieder Potenzen von 2 werden. Den Nachweis dafür, daß das für jeden Wert von n zutrifft, übergehen wir hier.

c) Entwicklung von $P_n(\cos\vartheta)$ nach Kosinus der Vielfachen von ϑ.

Ist $x = \cos\vartheta$, wo ϑ einen reellen Winkel bezeichnet, so wird (vgl. Gl. (1a) S. 10)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos\vartheta + \alpha^2}} = (1 - \alpha e^{i\vartheta})^{-\frac{1}{2}} (1 - \alpha e^{-i\vartheta})^{-\frac{1}{2}}.$$

Nach dem binomischen Satze ist

$$(1-\alpha e^{i\vartheta})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha e^{i\vartheta} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\alpha^2 e^{2i\vartheta} + \ldots$$
$$+ \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}\alpha^n e^{ni\vartheta} + \ldots,$$

$$(1-\alpha e^{-i\vartheta})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha e^{-i\vartheta} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\alpha^2 e^{-2i\vartheta} + \ldots$$
$$+ \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4.\,(2n)}\alpha^n e^{-ni\vartheta} + \ldots$$

Jede dieser beiden Reihen konvergiert für $|\alpha| < 1$, und dasselbe gilt für ihr Produkt. Wir bilden letzteres und sammeln alle Glieder, die den Faktor α^n haben. Solche Glieder ergeben sich, indem man das Glied der oberen Reihe, das der Faktor α^n enthält, und das Glied der unteren multipliziert, das den Faktor α^0 hat, multipliziert, ebenso das Glied mit α^{n-1} der oberen und das Glied mit α^1 der unteren usw., schließlich das Glied mit α^0 der oberen und das mit α^n der unteren Reihe. Der Faktor von α^n in dem Produkt beider Reihen wird also

$$\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}(e^{ni\vartheta}+e^{-ni\vartheta}) + \frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\ldots(2n-2)}\cdot\frac{1}{2}(e^{(n-2)i\vartheta}+e^{-(n-2)i\vartheta})$$
$$+ \frac{1\cdot 3\ldots(2n-5)}{2\cdot 4\ldots(2n-4)}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(e^{(n-4)i\vartheta}+e^{-(n-4)i\vartheta}) + \ldots$$

Der Faktor von α^n ist aber $P_n(\cos\vartheta)$. Man erhält daher, wenn man die Exponentialgrößen mit imaginären Exponenten durch die reellen Kosinus ersetzt und den Koeffizienten des höchsten Gliedes herausnimmt:

$$(9)\quad P_n(\cos\vartheta) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}\Big\{2\cos(n\vartheta) + \frac{n}{2n-1}2\cos(n-2)\vartheta$$
$$+ \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}2\cos(n-4)\vartheta$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}2\cos(n-6)\vartheta + \ldots\Big\}$$

Die Reihe schließt für ungerade n mit dem Gliede, das den Faktor $2\cos\vartheta$, für gerade n mit dem Gliede, das den

Faktor $\cos(0 . \vartheta)$ hat, also konstant ist; doch fällt für gerade n im letzten Gliede der Faktor 2, den alle übrigen Glieder haben, fort

Für einfache Werte von n wird

$$(9a) \quad \begin{cases} P_1(\cos\vartheta) = \cos\vartheta, P_2(\cos\vartheta) = \frac{3}{8}\left(2\cos 2\vartheta + \frac{2}{3}\right), \\ P_3(\cos\vartheta) = \frac{5}{16}\left(2\cos 3\vartheta + \frac{3}{5} 2\cos\vartheta\right). \end{cases}$$

Folgerung. Da in der Reihe (9) alle Koeffizienten positiv sind, und da alle Kosinus ihren größten Wert 1 für $\vartheta = 0$ annehmen, so folgt, daß auch $P_n(\cos\vartheta)$ fur $\vartheta = 0$ seinen größten Wert hat, d. h $P_n(1) = 1$ ist der größte Wert, den $P_n(\cos\vartheta)$ annehmen kann. Ferner ist $P_n(\cos\vartheta)$ größer als die Summe, die sich aus (9) ergibt, wenn man statt jedes Kosinus -1 setzt (und für gerade n auch das Vorzeichen des konstanten Gliedes umkehrt), d h. es ist $P_n(\cos\vartheta) > -P_n(1)$ oder $P_n(\cos\vartheta) > -1$. Die Kugelfunktionen haben daher mit den trigonometrischen Funktionen die Eigenschaft gemein, daß, wenn x reell ist und zwischen -1 und $+1$ liegt, $P_n(x)$ zwischen -1 und $+1$ liegt.

Aus dieser Eigenschaft folgt aufs neue, daß für reelle α und x, falls

$$-1 \leqq x \leqq 1, 0 < \alpha < 1$$

ist, die Reihe (1) konvergiert.

Außer den hier entwickelten Darstellungen von $P_n(x)$ existieren noch andere, z. B. für $x = \cos\vartheta$ Reihen, die nach Potenzen von $\sin\frac{1}{2}\vartheta$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta$ oder $\operatorname{tg}\vartheta$ fortschreiten. Auf diese gehen wir hier nicht ein, ebensowenig wie auf die Darstellungen von $P_n(x)$ mittels der hypergeometrischen Reihe.

d) Das Laplacesche Integral.

Laplace hat zuerst $P_n(x)$ in Form eines bestimmten Integrals dargestellt. Den Ausgangspunkt bildet die Formel

$$(10) \qquad \int_0^\pi \frac{d\varphi}{a + b\cos\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

zu deren Gültigkeit erforderlich ist, daß a reell und positiv, daß ferner b entweder reell und absolut kleiner als a, oder auch daß b rein imaginär ist.*)

Mittels der Formel (10) läßt sich der Ausdruck (A) (S. 9), dessen Entwicklung auf die Kugelfunktionen führte, durch ein bestimmtes Integral darstellen. Wir beschränken uns dabei auf reelle Werte von x und reelle positive von α. Da

$$1-2\alpha x+\alpha^2=(1-\alpha x)^2-\alpha^2(x^2-1)$$

ist, so folgt aus (10)

$$(11)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\varphi}{1-\alpha x\mp\alpha\sqrt{x^2-1}\cos\varphi}.$$

Nach dem, was oben bemerkt ist, ist zur Gültigkeit dieser Darstellung folgendes nötig: a) Wenn x reell ist und zwischen -1 und $+1$ liegt, so muß α kleiner als 1 sein. b) Wenn x reell und größer als 1 ist, so muß $\alpha<\frac{1}{x}$ und $1-\alpha x>\alpha\sqrt{x^2-1}$ sein, d. h. $\alpha<\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$ oder $\alpha<x-\sqrt{x^2-1}$. Ist diese letztere Bedingung erfüllt, so ist übrigens auch die erste $\left(\alpha<\frac{1}{x}\right)$ erfüllt. c) Ist x negativ und absolut größer als 1, so sind die für die Anwendung der Formel (10) erforderlichen Bedingungen von selbst erfüllt. Wir wählen hier aber, wenn $x=-x_1$ ist, $\alpha<x_1-\sqrt{x_1^2-1}$.

---

*) Man leitet die Formel (10) für reelle b ab, indem man an Stelle von φ die neue Integrationsvariable ψ mittels der Substitution

$$\operatorname{tg}\psi=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\varphi\right)$$

einführt. — Ist b rein imaginär, $b=ib_1$, so erweitere man die zu integrierende Funktion mit $a-ib_1\cos\varphi$. Dadurch zerfällt das Integral in die Summe zweier, und von diesen verschwindet das zweite, während der Wert des ersten sich mittels der Substitution

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b_1^2}}\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\psi$$

ergibt.

Durch diese Wahl von α ist folgendes erreicht: 1) In allen drei Fällen sind die Bedingungen erfüllt, unter denen die Reihe (1) (S. 9) konvergiert; 2) ist für alle reellen x

$$\left|\alpha x \pm \alpha \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right| < 1.$$

Daher kann auch die zu integrierende Funktion auf der rechten Seite von (11) in eine konvergente Reihe entwickelt werden:

$$(12) \quad \frac{1}{1-\alpha x \mp \alpha\sqrt{x^2-1}\cos\varphi} = \frac{1}{1-\alpha\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)}$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \left[x \pm \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right]^n.$$

Integrieren wir diese Reihe gliedweise, was wegen ihrer absoluten Konvergenz gestattet ist, setzen die integrierte Reihe in (11) ein und wenden zugleich auf die linke Seite von (11) die Gl (1) (S. 9) an, so ergibt sich

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n P_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(x \pm \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^n d\varphi.$$

Da diese Gleichung für beliebige, innerhalb der oben angegebenen Grenzen veränderliche α gilt, so sind die Koeffizienten gleicher Potenzen von α beiderseits gleich, und wir erhalten das **Laplacesche** Integral

$$(13) \qquad P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(x \pm \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^n d\varphi.$$

Bei der Ableitung dieser Gleichung ist x als reell vorausgesetzt. Daß sie auch für komplexe x gilt, kann folgendermaßen nachgewiesen werden. Entwickelt man unter dem Integralzeichen die n-te Potenz nach dem binomischen Satze und integriert die einzelnen Summanden, so ergeben diejenigen Summanden, die ungerade Potenzen von $\cos\varphi$, also auch ungerade Potenzen von $\sqrt{x^2-1}$ enthalten, den Integralwert 0. Die rechte Seite von (13) geht dadurch in eine ganze rationale Funktion von x vom Grade n über, und da diese für reelle x mit der Funktion (4), S. 12 identisch ist, so ist sie es auch für komplexe x.

Folgerung. Setzt man in (3) $x = \cos\vartheta$, somit $\sqrt{x^2-1} = i\sin\vartheta$, so wird

$$(\cos\vartheta \pm i\sin\vartheta\cos\varphi)^n = \cos^n\vartheta + \sum_{k=1}^{n} n_k \cos^{n-k}\vartheta\,(\pm i)^k \sin^k\vartheta\cos^k\varphi,$$

und es wird für ungerade k

$$\int_0^\pi \cos^k\varphi\, d\varphi = 0,$$

dagegen für gerade $k = 2k_1$

$$\int_0^\pi \cos^{2k_1}\varphi\, d\varphi = \frac{1\cdot 3\ldots(2k_1-1)}{2\cdot 4\ldots(2k_1)}\cdot\pi$$

und somit

$$P_n(\cos\vartheta) = \cos^n\vartheta + \sum(-1)^{k_1} n_{2k_1}\cdot\frac{1\cdot 3\ldots(2k_1-1)}{2\cdot 4\ldots(2k_1)}\cos^{n-2k_1}\vartheta\sin^{2k_1}\vartheta;$$

dabei ist die Summe für gerade n von $k_1 = 1$ bis $k_1 = \frac{n}{2}$, für ungerade n von $k_1 = 1$ bis $k_1 = \frac{1}{2}(n-1)$ zu erstrecken. Setzt man für den Binomialkoeffizienten n_{2k_1} seinen Wert, so ergibt sich für $P_n(\cos\vartheta)$ die neue Reihe:

$$(14)\quad \begin{cases} P_n(\cos\vartheta) = \cos^n\vartheta + \\ \displaystyle\sum_{k_1=1}^{k_1 \leqq \frac{n}{2}} (-1)^{k_1}\frac{n(n-1)\ldots(n-2k_1+1)}{[2\cdot 4\ldots(2k_1)]^2}\cos^{n-2k_1}\vartheta\sin^{2k_1}\vartheta \end{cases}$$

oder ausgeschrieben

$$(14\text{a})\quad P_n(\cos\vartheta) = \cos^n\vartheta - \frac{n(n-1)}{2\cdot 2}\cos^{n-2}\vartheta\sin^2\vartheta$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 4}\cos^{n-4}\vartheta\sin^4\vartheta - \ldots.$$

e) Werte von $P_n(\cos\vartheta)$ für sehr große Werte des Index n.

Aus dem Laplaceschen Integral ergibt sich der Grenzwert, dem die Kugelfunktion $P_n(x)$ zustrebt, wenn der Index n über alle Grenzen wächst. Wir wollen diesen Grenzwert nur für den Fall untersuchen, daß x der Kosinus eines reellen Winkels ist, $x = \cos\vartheta$.

Ist zunächst $\vartheta = 0$, also $\cos\vartheta = 1$, so wissen wir, daß $P_n(1) = 1$ ist für jeden Wert des Index n; daher ist der Grenzwert von $P_n(1)$ für $n = \infty$ ebenfalls 1.

Ist aber ϑ von 0 und π verschieden, so wird

$$\lim_{n=\infty} P_n(\cos\vartheta) = 0. \tag{15}$$

Beweis: Ist zunächst n endlich, so ist nach (13)

$$\begin{aligned}P_n(\cos\vartheta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\varphi]^n\, d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} [\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\varphi]^n\, d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} [\cos\vartheta - i\sin\vartheta\cos\varphi]^n\, d\varphi\end{aligned}$$

Setzt man

$$\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\varphi = \varrho(\cos\lambda + i\sin\lambda),$$

so wird

$$\begin{aligned}P_n(\cos\vartheta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varrho^n[\cos(n\lambda) + i\sin(n\lambda)]\, d\varphi \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varrho^n[\cos(n\lambda) - i\sin(n\lambda)]\, d\varphi,\end{aligned}$$

$$\text{(a)} \quad P_n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varrho^n \cos(n\lambda)\, d\varphi,$$

und darin ist

$$\varrho^2 = \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\vartheta\sin^2\varphi.$$

Für $\varphi > 0$ ist, da $0 < \vartheta < \pi$, ϱ ein echter Bruch, und ϱ^n wird mit wachsendem n beliebig klein. Aber für $\varphi = 0$

selbst wird $\varrho = 1$, so daß nicht im ganzen Integrationsgebiet ϱ^n beliebig klein wird. Wir zerlegen daher das Integral (a) in zwei andere

$$\text{(b)} \qquad P_n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\varepsilon} \varrho^n \cos(n\lambda)\, d\varphi + \frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}\pi} \varrho^n \cos(n\lambda)\, d\varphi\,.$$

und darin soll ε eine positive Größe bezeichnen, über die weiterhin verfügt werden soll. Der erste Summand der rechten Seite von (b) ist kleiner als $\frac{2}{\pi}\varepsilon$; denn der größte Wert, den ϱ innerhalb der Grenzen annehmen kann, ist 1, und daher wird die zu integrierende Funktion und mit ihr das Integral zu groß, wenn statt $\varrho^n \cos(n\lambda)$ gesetzt wird 1. Verfügen wir nun über ε derart, daß ε mit wachsendem n kleiner und kleiner wird, indem wir setzen

$$\varepsilon = \frac{a}{n^{\alpha}},$$

wo a eine positive Zahl, a von n unabhängig ist, so verschwindet für $n = \infty$ die Größe ε und damit der erste Summand der rechten Seite von (b)

Im zweiten Summanden hat ϱ, das mit wachsendem φ abnimmt, seinen größten Wert für die untere Grenze ε. Nennen wir diesen Wert ϱ_1, so ist

$$\text{(c)} \qquad \frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}\pi} \varrho^n \cos(n\lambda)\, d\varphi < \frac{2}{\pi}\varrho_1^n\left(\frac{1}{2}\pi - \varepsilon\right).$$

Nun kann man ϱ_1 so schreiben

$$\varrho_1 = \left[1 - \sin^2\vartheta\left(\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \cdot \frac{a^2}{n^{2\alpha}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\varrho_1^n = \left\{\left[1 - \sin^2\vartheta\left(\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \frac{a^2}{n^{2\alpha}}\right]^{n^{2\alpha}}\right\}^{\frac{1}{2}n^{1-2\alpha}}\,.$$

Wächst nun n über alle Grenzen, so ist $(\sin\varepsilon)/\varepsilon = 1$,

$$\lim\left[1 - \sin^2\vartheta\,\frac{a^2}{n^{2\alpha}}\right]^{n^{2\alpha}} = e^{-a^2\sin^2\vartheta},$$

somit

$$\lim \varrho_1^n = \lim e^{-u^2 \sin^2 \vartheta \cdot \frac{1}{2} n^{1-2\alpha}}.$$

Wählen wir die positive Zahl α so, daß $1-2\alpha > 0$, so wird

$$\lim \frac{1}{2} n^{1-2\alpha} = +\infty \text{ und } \lim \varrho_1^n = 0,$$

d. h. nach (c) wird für $n=\infty$ auch der zweite Summand der rechten Seite von (b) gleich Null. Für $n=\infty$ wird also $P_n(\cos\vartheta)=0$.

Zusatz 1. Das Resultat bleibt auch richtig, wenn ϑ zwar größer als Null ist, sich aber mit wachsendem n immer mehr dem Werte Null in gewisser Weise nähert. Ist nämlich

$$\vartheta = \frac{u}{n^\beta},$$

wo u von n unabhängig und $\beta > 0$ ist, so wird zunächst

$$\varrho_1 = \left\{1 - \left(\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}\right)^2 \sin^2\varepsilon \frac{u^2}{n^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

oder für $\varepsilon = \frac{a}{n^\alpha}$

$$\varrho_1 = \left\{1 - \left(\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}\right)^2 \left(\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \frac{a^2 u^2}{n^{2\alpha+2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\varrho_1^n = \left\{\left[1 - \left(\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}\right)^2 \left(\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \frac{a^2 u^2}{n^{2\alpha+2\beta}}\right]^{n^{2\alpha+2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2} n^{1-2\alpha-2\beta}},$$

woraus man, wie oben, erkennt, daß $\lim\limits_{n=\infty} \varrho_1^n = 0$, falls nur

$$\alpha + \beta < \frac{1}{2},$$

während im übrigen α und β beliebige positive Größen sein können. Die letzte Bedingung ist immer zu erfüllen, wenn β angebbar kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Wir haben also das Resultat

$$\lim_{n=\infty} P_n\left(\cos\frac{u}{n^\beta}\right) = 0, \tag{15a}$$

falls β angebbar kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.

Zusatz 2. Anders gestaltet sich das Resultat für $\beta = 1$. Ist

$$\vartheta = \frac{u}{n},$$

so wird

$$\lim_{n=\infty} (\cos\vartheta - i\sin\vartheta\cos\varphi)^n = \lim_{n=\infty}\left[1 - \frac{iu}{n}\cos\varphi - \frac{u^2}{2n^2} + \cdots\right]^n$$
$$= e^{iu\cos\varphi},$$

daher

$$\lim_{n=\infty} P_n\left(\cos\frac{u}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{iu\cos\varphi}\,d\varphi$$

(15b)

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(u\cos\varphi) - i\sin(u\cos\varphi)]\,d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(u\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Das rechtsstehende Integral ist die sogenannte Besselsche Funktion oder Zylinderfunktion $J_0(u)$.

f) Darstellung von $P_n(x)$ als Differentialquotient. Wurzeln der Gleichung $P_n(x) = 0$.

Wir stellen uns die Aufgabe, die in dem Laplaceschen Integral auftretende Potenz

$$(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n$$

nach Kosinus der Vielfachen von φ zu entwickeln. Zu dem Zwecke drücken wir $\cos\varphi$ durch Exponentialgrößen mit imaginären Exponenten aus, so wird

$$x - \sqrt{x^2-1}\cos\varphi = \frac{2xe^{i\varphi} - (1 - e^{2i\varphi})\sqrt{x^2-1}}{2e^{i\varphi}}$$
$$= \frac{2xe^{i\varphi}\sqrt{x^2-1} + (1 + e^{2i\varphi})(x^2-1)}{2e^{i\varphi}\sqrt{x^2-1}}$$
$$= \frac{(x - e^{i\varphi}\sqrt{x^2-1})^2 - 1}{2e^{i\varphi}\sqrt{x^2-1}}.$$

Setzen wir zur Abkurzung

$$(\alpha)\qquad e^{i\varphi}\sqrt{x^2-1}=z,$$

so ist

$$x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi=\frac{(x+z)^2-1}{2z}$$

und

$$2^n(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n=\frac{[(x+z)^2-1]^n}{z^n}.$$

Den Zähler der rechten Seite dieser Gleichung entwickeln wir nach dem Taylorschen Satze nach Potenzen von z.

$$[(x+z)^2-1]^n=(x^2-1)^n+\frac{z}{1}\frac{d(x^2-1)^n}{dx}+\frac{z^2}{2!}\frac{d^2(x^2-1)^n}{dx^2}+\dots$$
$$+\frac{z^{2n}}{(2n)!}\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}},$$

dividieren dann durch z^n und ordnen nach Potenzen von z, so wird

$$(\beta)\quad \frac{[(x+z)^2-1]^n}{z^n}=\frac{1}{n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$
$$+\frac{z}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}}+\dots+\frac{z^\nu}{(n+\nu)!}\frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu}}+\dots$$
$$+\frac{z^{-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}+\dots+\frac{z^{-\nu}}{(n-\nu)!}\frac{d^{n-\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n-\nu}}+\dots;$$

die Reihe (β) bricht bei $\nu=n$ ab; im letzten Summanden ist unter $0!$ die Zahl 1 zu verstehen. In (β) setzen wir für z seinen Wert (α) ein und drücken $e^{\nu i\varphi}$ durch Kosinus und Sinus von $\nu\varphi$ aus, so ergibt sich

$$(\gamma)\quad 2^n(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n=\frac{[(x+z)^2-1]^n}{z^n}$$

$$=\frac{1}{n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(\sqrt{x^2-1})^{+\nu}(\cos(\nu\varphi)+i\sin(\nu\varphi))}{(n+\nu)!}\frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu}}$$
$$+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(\sqrt{x^2-1})^{-\nu}(\cos(\nu\varphi)-i\sin(\nu\varphi))}{(n-\nu)!}\frac{d^{n-\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n-\nu}}.$$

Auf der rechten Seite von (γ) müssen nun die Koeffizienten aller Sinus verschwinden. Denn entwickelt man $(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n$ nach dem binomischen Satze und drückt alle Potenzen von $\cos\varphi$ durch erste Potenzen der trigonometrischen Funktionen der Vielfachen des Winkels φ aus, so erhält man nur Kosinus dieser Vielfachen, keine Sinus. Auf der rechten Seite von (γ) müssen sich daher alle Sinus fortheben. Es muß somit die folgende, zuerst von Jacobi aufgestellte Gleichung bestehen:

$$(16)\quad \frac{(\sqrt{x^2-1})^\nu}{(n+\nu)!}\,\frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu}}=\frac{(\sqrt{x^2-1})^{-\nu}}{(n-\nu)!}\,\frac{d^{n-\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n-\nu}},\quad (\nu\leqq n)$$

Infolgedessen geht die Gleichung (γ) in folgende über

$$(17)\quad (x+\cos\varphi\,.\sqrt{x^2-1})^n=\frac{1}{2^n\,.\,n!}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$
$$+\frac{2}{2^n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(\sqrt{x^2-1})^\nu}{(n+\nu)!}\,\frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu}}\cos(\nu\varphi);$$

in der Summe rechts kann man überall $+\nu$ mit $-\nu$ vertauschen.

Integrieren wir Gleichung (17) nach φ zwischen den Grenzen 0 und π und beachten, daß für jeden ganzzahligen Wert ν (außer für $\nu=0$)

$$\int_0^\pi \cos(\nu\varphi)\,d\varphi=0$$

ist, so folgt

$$\int_0^\pi (x+\cos\varphi\cdot\sqrt{x^2-1})^n\,d\varphi=\pi\cdot\frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Das Integral auf der linken Seite ist nach (13) $=\pi P_n(x)$, daher ist

$$(18)\qquad P_n(x)=\frac{1}{2^n\,.\,n!}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Die Gleichung (18) ist zuerst von Rodrigues, später unabhängig von diesem von Ivory und Jacobi gefunden.

Wir wollen aus (17) noch einen weiteren Schluß ziehen.

Wir multiplizieren die Gleichung mit $\cos(\nu\varphi)$ und integrieren zwischen 0 und π. Dabei ist zu beachten, daß

$$\int_0^\pi \cos(\nu\varphi)\cos(\nu'\varphi)\,d\varphi$$

$=0$ ist, wenn ν und ν' zwei voneinander verschiedene ganze Zahlen sind, während das Integral für $\nu=\nu'$ den Wert $\frac{1}{2}\pi$ hat. So ergibt sich

$$(19)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right]^n \cos(\nu\varphi)\,d\varphi = \frac{(\sqrt{x^2-1})^\nu}{2^n.(n+\nu)!}\frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{d\,x^{n+\nu}}$$

und darin kann wiederum $+\nu$ mit $-\nu$ vertauscht werden. Von der Gleichung (19) wird später Gebrauch gemacht werden.

Aus (18) ziehen wir die wichtige Folgerung, daß die Gleichung

$$P_n(x)=0$$

lauter reelle Wurzeln hat, die sämtlich zwischen -1 und $+1$ liegen. Denn hat eine algebraische Gleichung $f(x)=0$ zwischen $x=a$ und $x=b$ p reelle Wurzeln, so hat in demselben Intervall die Gleichung $f'(x)=0$ mindestens $(p-1)$ reelle Wurzeln, da zwischen je zwei aufeinander folgenden Wurzeln von $f(x)=0$ mindestens eine Wurzel von $f'(x)=0$ liegt. Das über die Anzahl der Wurzeln Gesagte gilt nicht nur, wenn die zwischen $x=a$ und $x=b$ liegenden Wurzeln von $f(x)=0$ alle verschieden, sondern auch, wenn mehrfache Wurzeln darunter sind. Weiter hat die Gleichung $f''(x)=0$ zwischen $x=a$ und $x=b$ mindestens $(p-2)$ reelle Wurzeln usw.

Nun hat die Gleichung

$$f(x)=(x^2-1)^n=0$$

$2n$ reelle Wurzeln, von denen n in $x=+1$, n in $x=-1$ zusammenfallen. In dem Intervall $x=-1$ bis $x=+1$ hat daher die Gleichung $f'(x)=0$ $(2n-1)$ reelle Wurzeln, von denen je $(n-1)$ in $x=+1$ und $x=-1$ zusammenfallen; die Gleichung $f''(x)=0$ hat in demselben Intervall (die Grenzen

eingeschlossen) $(2n-2)$ reelle Wurzeln usw., endlich hat die Gleichung

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n (x^2-1)^n}{d x^n} = 0$$

in dem Intervall $(-1, +1)$ mindestens n reelle Wurzeln. Da ferner diese Gleichung überhaupt nur n Wurzeln hat, so sind alle ihre Wurzeln reell und liegen zwischen -1 und $+1$. $f^{n}(x)$ unterscheidet sich aber nach (18) von $P_n(x)$ nur um einen konstanten Faktor, daher gilt das Resultat für die Gleichung $P_n(x)=0$. $x=+1$ und $x=-1$ selbst gehören nicht zu den Wurzeln von $P_n(x)=0$, da $P_n(1)=1$, $P_n(-1)=(-1)^n$ ist.

Weiterhin wird sich ergeben, daß die Wurzeln von $P_n(x)=0$ sämtlich voneinander verschieden, daß keine Doppel- oder mehrfachen Wurzeln unter ihnen sind (siehe Kap. 3, S. 35).

g) Die Integralsätze der Kugelfunktionen.

Für die Kugelfunktionen gelten folgende Integralsätze, die den S. 25 benutzten Integralsätzen der trigonometrischen Funktionen analog sind.

Sind m und n zwei voneinander verschiedene ganze Zahlen, so ist

$$(20) \qquad \int_{-1}^{+1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0,$$

während

$$(20a) \qquad \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2\, dx = \frac{2}{2n+1}$$

ist. Wird $x=\cos\vartheta$ gesetzt, so lauten die Sätze:

$$(20b) \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\pi} P_n(\cos\vartheta)\, P_m(\cos\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta = 0 \qquad (m \gtrless n), \\ \displaystyle\int_0^{\pi} [P_n(\cos\vartheta)]^2 \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{2}{2n+1}. \end{cases}$$

Beweis. Stellt man sowohl $P_n(x)$, als $P_m(x)$ mittels der Gleichung (18) S. 24 als Differentialquotienten dar und setzt zur Abkürzung

$$(21) \qquad \frac{1}{2^n . n!} \cdot \frac{1}{2^m . m!} = C,$$

so wird

$$(22) \quad J = \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\, dx = C . \int_{-1}^{+1} \frac{d^n (x^2-1)^n}{d x^n} \frac{d^m (x^2-1)^m}{d x^m} dx .$$

Durch teilweise Integration kann man den Index des einen Differentialquotienten erniedrigen und zugleich den des andern erhöhen, und zwar wollen wir, wenn $n > m$ ist, n erniedrigen, m erhohen. Die einmalige teilweise Integration ergibt

$$J = C \left[\frac{d^{n-1} (x^2-1)^n}{d x^{n-1}} \frac{d^m (x^2-1)^m}{d x^m} \right]_{-1}^{+1} - C \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-1} (x^2-1)^n}{d x^{n-1}} \frac{d^{m+1} (x^2-1)^m}{d x^{m+1}} dx$$

Der erste Summand der rechten Seite verschwindet; denn der $(n-1)$-te Differentialquotient von $(x^2-1)^n$ enthalt den Faktor x^2-1, und dieser Faktor verschwindet für die beiden Grenzen $x=+1$ und $x=-1$. Ebenso verschwinden auch die niedrigeren Differentialquotienten von $(x^2-1)^n$ an den Grenzen. Durch m-malige teilweise Integration erhält man daher:

$$(22a) \quad J = (-1)^m C \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-m} (x^2-1)^n}{d x^{n-m}} \cdot \frac{d^{2m} (x^2-1)^m}{d x^{2m}} dx .$$

Hier ist der zweite Faktor unter dem Integral konstant $= (2m)!$, und da $n-m > 0$, so wird

$$(22b) \qquad J = (-1)^m C . (2m)! \left[\frac{d^{n-m-1} (x^2-1)^n}{d x^{n-m-1}} \right]_{-1}^{+1} .$$

Der $(n-m-1)$-te Differentialquotient von $(x^2-1)^n$ enthält aber den Faktor $(x^2-1)^{m+1}$, verschwindet also für die Grenzen. Damit ist die Gleichung (20) für $n > m$ bewiesen. Analog wird der Beweis für $m > n$.

Für den Fall $n = m$ verfahren wir ebenso, d. h. wir vermindern durch fortgesetzte teilweise Integration den Index des einen und erhöhen den des andern Differentialquotienten in (22). Durch n-malige Anwendung dieses Verfahrens ergibt sich die Gleichung, in die (22a) für $n = m$ übergeht, d. h

$$(22c) \qquad J = (-1)^n C \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n \frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{d x^{2n}} dx,$$

d. h. wegen der Bedeutung von J und C [Gl. (22) und (21)] für $n = m$

$$(22d) \quad \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = (-1)^n \left(\frac{1}{2^n \cdot n!}\right)^2 \cdot (2n)! \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n dx .$$

Führen wir in dem Integral der rechten Seite an Stelle von x die Integrationsvariable ϑ durch die Substitution $x = \cos\vartheta$ ein, so wird

$$(-1)^n \int_{-1}^{-1} (x^2-1)^n dx = \int_0^{\pi} \sin^{2n+1} \vartheta \, d\vartheta ,$$

und dies Integral hat, wie bekannt, den Wert

$$2 \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3}$$

Die rechte Seite von (22d) wird daher

$$\left(\frac{1}{2^n \cdot n!}\right)^2 (2n)! \frac{2 \cdot 4 \ldots (2n)}{3 \cdot 5 \ldots (2n+1)} \cdot 2 = \frac{2}{2n+1},$$

und damit geht (22d) in die zu beweisende Gleichung (20a) über.

h) Anwendungen der Integralsätze. Rekursionsformeln für die Kugelfunktionen.

Wenn man weiß, daß irgendeine Funktion $f(x)$ sich in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe entwickeln läßt:

$$(23) \qquad f(x) = \sum A_n P_n(x),$$

so kann man mittels der Integralsätze (20) und (20a) die Koeffizienten A_ν der Entwicklung bestimmen. Multipliziert man nämlich (23) mit $P_n(x)$ und integriert gliedweise zwischen den Grenzen -1 und $+1$, so verschwinden nach (20) auf der rechten Seite alle Integrale, in denen ν von n verschieden ist, während (20a) den Wert des Integrals für $\nu = n$ bestimmt: es wird also

$$\int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x)\, dx = \frac{2}{2n+1} A_n, \quad A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x)\, dx. \tag{23a}$$

Durch dieselbe Argumentation, die zur Bestimmung von A_n führte, ergibt sich auch, daß, wenn eine Funktion $f(x)$ sich in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe entwickeln läßt, diese Entwicklung nur auf eine Art möglich ist, oder anders ausgedruckt, daß, wenn zwei nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihen

$$\sum A_\nu P_\nu(x) \text{ und } \sum B_\nu P_\nu(x)$$

fur alle Werte von x gleich sind, die Koeffizienten der Kugelfunktionen mit gleichem Index in beiden Reihen dieselben sein müssen.

Die Frage, unter welchen Bedingungen man eine Funktion $f(x)$ in eine Reihe von der Form (23) entwickeln kann, wird später in Kapitel 6 erörtert werden. In einem Falle läßt sich die Möglichkeit der Entwicklung sofort zeigen, nämlich wenn $f(x)$ eine ganze rationale Funktion von x ist. Zunächst läßt sich jede ganze Potenz von x durch eine endliche Summe von Kugelfunktionen darstellen. Aus den Ausdrücken (4a) S. 13, die $P_n(x)$ für die einfachsten Werte des Index n angeben, folgt:

$$1 = x^0 = P_0(x); \quad x^2 = \frac{2}{3} P_2(x) + \frac{1}{3} P_0(x);$$

$$x^4 = \frac{8}{35} P_4(x) + \frac{4}{7} P_2(x) + \frac{1}{5} P_0(x);$$

$$x = P_1(x); \quad x^3 = \frac{2}{5} P_3(x) + \frac{3}{5} P_1(x).$$

Setzt man die Ausdrücke für x^1 und x^3 in die Gleichung für $P_5(x)$ ein, so erhält man die analoge Darstellung für

x^5, und allgemein ergibt sich aus der Gleichung (4) S. 12 für $P_n(x)$ der entsprechende Ausdruck für x^n, falls die Potenzen x^{n-2}, x^{n-4}, ... durch derartige Reihen dargestellt werden können. Durch den Schluß von n auf $n+1$ gelangt man demnach zu einer Reihe für x^n von folgender Form:

$$(24)\qquad x^n = A_n P_n(x) + A_{n-2} P_{n-2}(x) + A_{n-4} P_{n-4}(x) + \cdots$$

Die Reihe schließt für gerade n mit $A_0 P_0(x)$, für ungerade n mit $A_1 P_1(x)$. Läßt sich aber jede ganze Potenz von x durch eine endliche Summe von Kugelfunktionen ausdrücken, so gilt dasselbe für alle ganzen rationalen Funktionen von x.

Wir wollen das Ergebnis auf mehrere Beispiele anwenden und für diese die Koeffizienten der Reihe bestimmen.

I. Es soll $\dfrac{dP_n(x)}{dx}$ in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe entwickelt werden.

Aus (4) S. 12 ergibt sich, daß $\dfrac{dP_n(x)}{dx}$ nur die Potenzen $x^{n-1}, x^{n-3}, x^{n-5}, \ldots$ enthält. Demnach enthält die gesuchte Reihe nur die Kugelfunktionen mit den Indizes $n-1$, $n-3$, $n-5$, ... d. h. es ist

$$(25)\qquad \frac{dP_n(x)}{dx} = \sum B_m P_m(x),$$

worin

$$0 \leqq m < n \text{ und } n-m \text{ ungerade}$$

ist. Gleichung (23a) lautet hier:

$$(26)\qquad B_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_m(x) \frac{dP_n(x)}{dx}\, dx.$$

Ferner folgt aus (25) und (20)

$$\int_{-1}^{+1} P_k(x) \frac{dP_n(x)}{dx}\, dx = 0, \text{ falls } k \geqq n.$$

Ebenso ist, da $n > m$

(26a) $$0 = \int_{-1}^{+1} P_n(x) \frac{d P_m(x)}{d x} d x.$$

Addiert man die mit $\frac{2m+1}{2}$ multiplizierte Gleichung (26a) zu (26), so ergibt sich

$$B_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d [P_n(x) P_m(x)]}{d x} d x = \frac{2m+1}{2} \Big[P_n(x) P_m(x) \Big]_{-1}^{+1}.$$

Für $x = +1$ haben $P_n(x)$ und $P_m(x)$ den Wert 1, für $x = -1$ dagegen den Wert $(-1)^n$, resp. $(-1)^m$, das Produkt $P_n \cdot P_m$ wird also 1 für $x = +1$, dagegen, da $n - m$ ungerade, $= -1$ für $x = -1$. Demnach wird

$$B_m = \frac{2m+1}{2} [1 - (-1)] = 2m + 1$$

Wir haben somit folgendes Resultat:

(27) $$\frac{d P_n(x)}{d x} = (2n-1) P_{n-1}(x) + (2n-5) P_{n-3}(x) + (2n-9) P_{n-5}(x) +$$

II. Wir entwickeln noch das Produkt $x \frac{d P_n(x)}{d x}$ nach Kugelfunktionen. Nach dem vorher Gesagten hat die Entwicklung die Form

$$x \frac{d P_n(x)}{d x} = \sum C_m P_m(x),$$

wobei

$$m \leqq n, \; n - m \text{ gerade}$$

ist. Ferner ist

(28) $$C_m \cdot \frac{2}{2m+1} = \int_{-1}^{+1} x \frac{d P_n(x)}{d x} P_m(x) \, d x$$

oder, wenn teilweise integriert wird,

$$(28a)\quad C_m \cdot \frac{2}{2m+1} = \Big[x P_n(x) P_m(x)\Big]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\, dx - \int_{-1}^{+1} x P_n(x) \frac{d P_m(x)}{dx}\, dx\,.$$

Da $n-m$ gerade ist, so hat das Produkt $x P_n P_m$ fur $x=-1$ den Wert -1, während fur $x=+1$ sein Wert $+1$ ist. Daher hat der erste Summand der rechten Seite von (28) den Wert 2. Ferner ist für $m<n$ sowohl der zweite, als der dritte Summand gleich Null, der erstere direkt nach (20) S. 26, der letztere deshalb, weil $x\frac{d P_m(x)}{dx}$, nach Kugelfunktionen entwickelt, nur Funktionen enthält, deren Index kleiner als n ist. Wir haben daher

$$C_m = (2m+1), \text{ falls } m<n.$$

Für $m=n$ dagegen folgt der Wert des zweiten Summanden aus (20a), und der dritte Summand ist für $m=n$ das in (28) auftretende Integral, somit ist

$$C_n \cdot \frac{2}{2n+1} = 2 - \frac{2}{2n+1} - C_n \cdot \frac{2}{2n+1},$$

woraus

$$C_n = n$$

folgt. Wir haben also

$$(29)\quad x\frac{d P_n(x)}{dx} = n P_n(x) + (2n-3) P_{n-2}(x) + (2n-7) P_{n-4}(x) + \dots$$

Die Reihen (27) und (29) haben als letztes Glied beide entweder $1 . P_0(x)$, oder $3 . P_1(x)$.

Aus den Reihen (27) und (29) ziehen wir noch folgende Folgerungen:

Ia. Wird in (27) einmal $n+1$, sodann $n-1$ an Stelle von n gesetzt, so hat man

$$\frac{d P_{n+1}(x)}{dx} = (2n+1) P_n(x) + (2n-3) P_{n-2}(x) + (2n-7) P_{n-4}(x) + \dots$$

$$\frac{d P_{n-1}(x)}{dx} = (2n-3) P_{n-2}(x) + (2n-7) P_{n-4}(x) + \dots$$

Subtrahiert man beide Gleichungen, so folgt

$$(30)\qquad \frac{d P_{n+1}(x)}{d x} - \frac{d P_{n-1}(x)}{d x} = (2n+1) P_n(x),$$

eine Gleichung, die fur $x = \cos\vartheta$ die Form annimmt:

$$(30\text{a})\quad \frac{d P_{n-1}(\cos\vartheta)}{d\vartheta} - \frac{d P_{n+1}(\cos\vartheta)}{d\vartheta} = (2n+1)\sin\vartheta \,.\, P_n(\cos\vartheta ..$$

Fur $n = 0$ geht Gleichung (30) in folgende über:

$$(30\text{b})\qquad \frac{d P_1(x)}{d x} = P_0(x).$$

IIa. Setzt man in (29) ebenfalls einmal $n+1$, sodann $n-1$ an Stelle von n und subtrahiert die dadurch entstehenden Gleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned} x\left\{\frac{d P_{n+1}(x)}{d x} - \frac{d P_{n-1}(x)}{d x}\right\} \\ &= (n+1) P_{n+1}(x) + (2n-1) P_{n-1}(x) + (2n-5) P_{n-3}(x) \\ &\qquad + (2n-9) P_{n-5}(x) + .. \\ &- (n-1) P_{n-1}(x) - (2n-5) P_{n-3}(x) - (2n-9) P_{n-5}(x) - \ldots \\ &= (n+1) P_{n+1}(x) + n P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Drückt man den zweiten Faktor der linken Seite mittels (30) aus, so folgt

$$(31)\quad (2n+1)\, x P_n(x) = (n+1) P_{n+1}(x) + n P_{n-1}(x).$$

Damit ist eine Rekursionsformel gewonnen, welche die Werte von P mit drei aufeinanderfolgenden Indizes und demselben Werte des Arguments x verbindet. Durch sukzessive Anwendung von (31) kann man aus $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ den Wert von $P_n(x)$ für jedes x berechnen.

Für $n = 0$ geht (31) in folgende Gleichung über:

$$(31\text{a})\qquad x P_0(x) = P_1(x).$$

Kapitel 3.

Die Differentialgleichung der Kugelfunktionen und die Kugelfunktion zweiter Art.

a) $P_n(x)$ genügt einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Doppelte Ableitung dieser Gleichung.

Wendet man die Jacobische Gleichung (16), S. 24 auf den speziellen Fall $\nu = 1$ an, so lautet dieselbe:

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{(n+1)!}\,\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}} = \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}$$

oder

$$(x^2-1)\,\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}} = n(n+1)\,\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}.$$

Durch nochmalige Differentiation ergibt sich:

$$1) \qquad \frac{d}{dx}\left\{(x^2-1)\,\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}}\right\} = n(n+1)\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Nach (18) ist aber

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = 2^n \,.\, n!\, P_n(x),$$

so daß Gleichung (1) auch so geschrieben werden kann:

$$\frac{d}{dx}\left\{(x^2-1)\,\frac{d\,[2^n \,.\, n!\, P_n(x)]}{dx}\right\} = n(n+1)\,2^n \,.\, n!\, P_n(x)$$

oder, wenn man beiderseits durch den konstanten Faktor $2^n \,.\, n!$ dividiert,

$$2) \qquad \frac{d(x^2-1)\dfrac{dP_n(x)}{dx}}{dx} - n(n+1)\,P_n(x) = 0$$

oder

$$2\,a) \qquad \frac{d(1-x^2)\dfrac{dP_n(x)}{dx}}{dx} + n(n+1)\,P_n(x) = 0$$

oder auch

$$\text{(2b)}\quad (1-x^2)\frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0$$

$P_n(x)$ genugt also einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Ist $x = \cos\vartheta$, so wird

$$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{df(\cos\vartheta)}{d\vartheta}\cdot\frac{1}{\sin\vartheta},$$

und daher geht die Gleichung (2a) in folgende uber:

$$\text{(2c)}\quad \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d\left[\sin\vartheta\,\dfrac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta}\right]}{d\vartheta} + n(n+1)P_n(\cos\vartheta) = 0.$$

Folgerung 1. Aus der eben abgeleiteten Differentialgleichung folgt, daß die Gleichung $P_n(x) = 0$ keine Doppel- oder mehrfachen Wurzeln haben kann. Denn wäre z. B $x = x_0$ eine Doppelwurzel der Gleichung $P_n(x) = 0$, so müßte für $x = x_0$ sowohl $P_n(x)$ selbst, als $\frac{dP_n(x)}{dx}$ verschwinden. Aus der Gleichung (2b) würde dann, da x_0 nicht $= \pm 1$ sein kann, folgen, daß auch $\frac{d^2 P_n(x)}{dx^2}$ für $x = x_0$ verschwindet.

Differentiiert man ferner die Gleichung (2b), so folgt

$$(1-x^2)\frac{d^3 P_n(x)}{dx^3} - 4x\frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} + (n^2 + n - 2)\frac{dP_n(x)}{dx} = 0.$$

Würden nun für $x = x_0$ P_n und $\frac{dP_n}{dx}$ und damit auch $\frac{d^2 P_n}{dx^2}$ verschwinden, so müßte, wie die letzte Gleichung lehrt, für $x = x_0$ auch $\frac{d^3 P_n}{dx^3}$ verschwinden. Mit dieser Argumentation kann man fortfahren, indem man (2b) zweimal, dreimal usw. differentiiert und nach der Differentiation jedesmal $x = x_0$ setzt. Aus der Annahme, daß x_0 eine Doppelwurzel der Gleichung $P_n(x) = 0$ wäre, würde somit folgen, daß für

$x = x_0$ auch $\frac{d^2 P_n(x)}{dx^2}, \frac{d^3 P_n(x)}{dx^3}, \ldots, \frac{d^n P_n(x)}{dx^n}$ verschwinden müßten. $\frac{d^n P_n(x)}{dx^n}$ ist aber, da P_n eine ganze Funktion n-ter Ordnung ist, eine von Null verschiedene Konstante. Somit ist unsere Annahme unzulässig, d. h. die Gleichung $P_n(x) = 0$ kann keine Doppel- oder mehrfachen Wurzeln besitzen.

Folgerung 2. Die Differentialgleichung (2) gestattet eine neue Herleitung der Formel (20) S. 26. Multipliziert man nämlich die Gleichung (2a) mit $P_m(x)$, subtrahiert von dieser die Gleichung, die sich aus ihr durch Vertauschung von m und n ergibt, und integriert dann nach x zwischen den Grenzen -1 und $+1$, so ergibt sich

$$(3)\quad \int_{-1}^{+1} P_m(x) \frac{d\left[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right]}{dx} dx - \int_{-1}^{+1} P_n(x) \frac{d\left[(1-x^2)\frac{dP_m(x)}{dx}\right]}{dx} dx$$
$$+ [n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0.$$

Die ersten beiden Summanden von (3) integriere man teilweise, wobei zu beachten ist, daß $(1-x^2)$ an den Grenzen verschwindet, so werden diese Summanden

$$-\int_{-1}^{+1} \frac{dP_m(x)}{dx}(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\, dx + \int_{-1}^{+1} \frac{dP_n(x)}{dx}(1-x^2)\frac{dP_m(x)}{dx}\, dx;$$

sie heben sich also auf, so daß (3) wird:

$$(3\text{a})\quad [n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0.$$

Ist hierin n von m verschieden, so ist der erste Faktor von 0 verschieden, daher muß der zweite Faktor verschwinden, und das ist die zu beweisende Gleichung.

Zweite Ableitung der Differentialgleichung. Wir geben noch eine zweite Ableitung unserer Differentialgleichung, und zwar eine Ableitung, die den Zusammenhang unserer Untersuchung mit ihrem Ausgangspunkte herstellt.

In Kap. 2 [Gl. (2), S. 11] ist der reziproke Abstand $1/\varrho$ zweier Punkte nach Kugelfunktionen entwickelt. Wir wenden diese Formel auf den speziellen Fall an, daß $r_1 = 1$, $\vartheta_1 = 0$, infolgedessen $\cos\gamma = \cos\vartheta$ ist. Zugleich sei $r < 1$, dann ist

$$(4)\qquad \frac{1}{\varrho} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n P_n(\cos\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\vartheta).$$

Andererseits genugt $1/\varrho$ der Laplaceschen Gleichung $\Delta\left(\frac{1}{\varrho}\right) = 0$, d. h. nach Gleichung (12) des ersten Kapitels (S. 7) ist, da $1/\varrho$ von φ unabhängig ist,

$$(5)\qquad \frac{\partial\, r^2 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial \sin\vartheta\, \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} = 0.$$

Setzt man in (5) die Reihe (4) ein, so kann diese ohne weiteres gliedweise differentiiert werden. Denn bei der Differentiation von $1/\varrho = (1 - 2r\cos\vartheta + r^2)^{-\frac{1}{2}}$ entstehen aus der Potenz mit dem Exponenten $-\frac{1}{2}$ nur die Potenzen mit den Exponenten $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots$, und entwickelt man diese nach steigenden Potenzen von r, so sind die Konvergenzbedingungen genau dieselben wie die für die Potenz mit dem Exponenten $-\frac{1}{2}$. Konvergiert also die Reihe für $1/\varrho$ (und das tut sie nach S. 10 und 15), so konvergieren auch die daraus durch Differentiation hervorgehenden Reihen. Aus (4) folgt also

$$(4\,\mathrm{a})\qquad \frac{\partial\, r^2 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial r}}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)\, r^n P_n(\cos\vartheta),$$

$$(4b)\quad \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial \sin\vartheta\,\dfrac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d\sin\vartheta\,\dfrac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta}}{d\vartheta}\,.$$

Nach (5) ist die Summe der linken Seiten von (4a) und (4b) gleich Null, daher ist auch die Summe der rechten Seiten gleich Null; und da das für beliebige Werte von $r < 1$ gilt, so müssen die Koeffizienten aller Potenzen von r verschwinden, d. h. es ist

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d\sin\vartheta\,\dfrac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta}}{d\vartheta} + n(n+1)\,P_n(\cos\vartheta) = 0\,,$$

und das ist die Gleichung (2c), die für $\cos\vartheta = x$ in (2a) übergeht.

Die erste Ableitung hat den Vorzug, daß sie auch für $x > 1$ gilt, während die zweite voraussetzte, daß x reell ist und zwischen $+1$ und -1 liegt.

5) Das allgemeine Integral der Differentialgleichung der Kugelfunktionen. Die Kugelfunktion zweiter Art.

Wir wollen nunmehr die Differentialgleichung (2) unabhängig von ihrer Entstehung behandeln. Bezeichnen wir die abhängige Veränderliche mit y, so lautet die Gleichung (2):

$$(6)\qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)\,y = 0\,.$$

Wir suchen dieser Gleichung durch eine nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe zu genügen von der Form

$$(7)\quad y = A x^a + A_1 x^{a-1} + A_2 x^{a-2} + \ldots + A_k x^{a-k} + \ldots\,.$$

Dann wird

$$\begin{aligned} x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - n(n+1)\,y &= [a(a+1) - n(n+1)]\,A x^a + [a(a-1) - n(n+1)]\,A_1 x^{a-1} \\ &+ [(a-1)(a-2) - n(n+1)]\,A_2 x^{a-2} + \ldots \\ &+ [(a-k)(a-k+1) - n(n+1)]\,A_k x^{a-k} + \ldots\,. \end{aligned}$$

und

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a(a-1)\, A x^{a-2} + (a-1)(a-2)\, A_1 x^{a-3} \\ + (a-2)(a-3)\, A_2 x^{a-4} + \ldots \\ + (a-k)(a-k-1)\, A_k x^{a-k-2} + \ldots$$

Soll durch Einsetzen dieser Ausdrücke Gleichung (6) erfüllt werden, so müssen die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x verschwinden, d. h. es muß

$$(8) \quad \begin{cases} [a(a+1) - n(n+1)]\, A = 0, \\ [a(a-1) - n(n+1)]\, A_1 = 0, \\ [(a-1)(a-2) - n(n+1)]\, A_2 = a(a-1)\, A, \\ \text{— — — — — — — — — — — — — — —} \\ [(a-k)(a-k+1) - n(n+1)]\, A_k = (a-k+2)(a-k+1)\, A_{k-2}, \\ \text{— — — — — — — — — — — — — — — — — —} \end{cases}$$

sein. Die erste dieser Bedingungen erfordert, da A nicht $=0$ ist [denn $A=0$ wurde nur die Bedeutung einer Änderung der Bezeichnung haben], daß

$$\text{entweder } a = n \text{ oder } a = -(n+1)$$

ist. In beiden Fällen ist $a(a-1) - n(n+1)$ von Null verschieden, daher erfordert die zweite Bedingung, daß $A_1 = 0$ ist. Die letzte Bedingung sagt aus, daß A_k gleich A_{k-2}, multipliziert mit einem endlichen Faktor, ist. Ist also $A_{k-2} = 0$, so muß auch $A_k = 0$ sein. Aus $A_1 = 0$ folgt also

$$A_3 = 0, \quad A_5 = 0, \quad \ldots$$

d. h. die sämtlichen Koeffizienten A mit ungeraden Indizes verschwinden.

Zur Berechnung der A mit geraden Indizes unterscheiden wir die beiden Fälle $a = n$ und $a = -(n+1)$. Zugleich setzen wir in (8), da k gerade sein muß $k = 2k'$. Dann lautet die letzte Gleichung (8)

a) für $a = n$:

$$[(n-2k')(n-2k'+1) - n(n+1)]\, A_{2k'} = (n-2k'+2)(n-2k'+1)\, A_{2k'-2}$$

oder

$$(8\text{a}) \quad 2k'(2n+1-2k')\, A_{2k'} = -(n-2k'+2)(n-2k'+1)\, A_{2k'-2}.$$

Setzt man in (8a) an Stelle von k' der Reihe nach $k'-1$, $k'-2, \dots, 2, 1$ [für $k'=1$ wird $2(2n-1)A_2 = -n(n-1)A$] und multipliziert alle diese Gleichungen, so folgt

$$2\cdot 4 \dots (2k')(2n-1)(2n-3)\dots(2n-1-2k')A_{2k'}A_{2k'-2}\dots A_2$$
$$= (-1)^{k'} n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-2k'+2)(n-2k'+1)A_{2k'-2}A_{2k'-4}\dots A_2 A$$

oder

$$(9) \quad A_{2k'} = (-1)^{k'} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-2k'+1)}{2\cdot 4\dots(2k')(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k'+1)} A,$$

die Reihe (7) wird also

$$(10) \quad y = A\left\{x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} - \dots \right.$$
$$\left. + (-1)^{k'} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-2k'+1)}{2\cdot 4\dots 2k'(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k'+1)} x^{n-2k'} + \dots \right\}$$

Die Reihe bricht, da n eine ganze Zahl ist, von selbst ab und ist, abgesehen von einem konstanten Faktor, $= P_n(x)$ [vgl. Gl. (4), S. 12]. Damit ist unabhängig von der Ableitung der Gleichung (6) gezeigt, daß $C . P_n(x)$ ein partikuläres Integral derselben ist, wenn C eine willkürliche Konstante bezeichnet

b) Für $a = -(n-1)$, $\lambda = 2k'$ folgt aus der allgemeinen Gleichung (8) an Stelle von (8a) die Gleichung

$$(8b) \quad 2k'(2n-1-2k')A_{2k'} = (n+2k')(n+2k'-1)A_{2k'-2}$$

[für $k'=1$ wird (8b) $2\cdot(2n+3)A_2 = (n+1)(n+2)A$]. Wendet man (8b) wiederholt an, indem man $k'-1$, $k'-2, \dots$, 1 an Stelle von k' setzt, und multipliziert alle Gleichungen, so ergibt sich

$$(9b) \quad A_{2k'} = \frac{(n-1)(n+2)(n+3)\dots(n+2k')}{2\cdot 4\dots(2k')(2n+3)(2n+5)\dots(2n+2k'+1)} A,$$

und die Reihe (7) wird in diesem Falle

(10b)
$$y = A\left\{x^{-(n-1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot(2n-3)}x^{-(n-3)} - \dots \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n+2)\dots(n+2k')}{2\cdot 4\dots 2k'(2n-3)(2n-5)\dots(2n+2k'+1)} x^{-(n+2k'+1)} + \dots \right\}.$$

Die Reihe (10b), in der, wie oben, A willkürlich bleibt, stellt ein zweites partikuläres Integral der Gleichung (6) dar, und zwar in Form einer unendlichen Reihe, die nach den allgemeinen Konvergenzbedingungen für $|x|>1$ konvergiert, fur $x=\infty$ verschwindet [Für $|x|<1$ und $|x|=1$ konvergiert die Reihe nicht mehr.] Gibt man in (10b) der willkürlichen Konstante A den Wert

$$A=\frac{n!}{1\cdot 3\ldots(2n+1)},$$

so bezeichnet man die Reihe mit $Q_n(x)$, also

$$(10\text{c})\quad Q_n(x)=\frac{n!}{1\cdot 3\ldots(2n+1)}\left\{\frac{1}{x^{n+1}}+\frac{(n+1)(n+2)}{2\cdot(2n+3)}\frac{1}{x^{n+3}}\right.$$
$$\left.+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4.(2n+3)(2n+5)}\frac{1}{x^{n+5}}+\ldots\right\},$$

und nennt sie die Kugelfunktion zweiter Art.

Damit haben wir fur den Fall $|x|>1$ zwei partikuläre Integrale der Gleichung (6) gefunden, und für diesen Fall ist das allgemeine Integral der Gleichung

$$(11)\qquad y=C\,P_n(x)+C'\,Q_n(x),$$

worin C und C' willkürliche Konstante sind.

Für $x=\infty$ wird $P_n(x)=\infty$, $Q_n(x)$, wie bemerkt, $=0$. Sucht man also ein Integral von (6), das für $x=\infty$ verschwindet, so ist in dem allgemeinen Integral (11) $C=0$ zu setzen, d. h. das gesuchte Integral hat die Form $C'\,Q_n(x)$.

c) Andere Darstellung der Kugelfunktion zweiter Art $Q_n(x)$.

Eine andere Darstellung der Kugelfunktion zweiter Art, und zwar eine solche, die für beliebige x gilt und für $|x|>1$ mit (10c) übereinstimmt, gewinnt man durch Anwendung einer schon von Euler angegebenen Methode, die aus einem partikulären Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ein andres abzuleiten lehrt. Weiß man, daß $y=P_n(x)$ der Gleichung (6), S. 38 genügt, so setze man

$$(12)\qquad y=u\cdot P_n(x),$$

wo u eine Funktion von x ist, und bestimme u derart, daß auch der Ausdruck (12) der Gleichung (6) genügt. Setzt man den Ausdruck (12) in (6) ein, so ergibt sich

$$\text{(12a)}\quad (x^2-1)\left[u\frac{d^2 P_n(x)}{d x^2}+2\frac{d u}{d x}\frac{d P_n(x)}{d x}+\frac{d^2 u}{d x^2}P_n(x)\right]$$
$$+2x\left[u\frac{d P_n(x)}{d x}+\frac{d u}{d x}P_n(x)\right]-n(n+1)\,u\,P_n(x)=0.$$

Faßt man in (12a) die Glieder mit dem Faktor u zusammen, so geben diese

$$u\left\{(x^2-1)\frac{d^2 P_n(x)}{d x^2}+2x\frac{d P_n(x)}{d x}-n(n+1)P_n(x)\right\},$$

und der Faktor von u verschwindet, da $P_n(x)$ der Gleichung (6) genügt. Demnach reduziert sich die Gleichung (12a) auf folgende:

$$\frac{d^2 u}{d x^2}(x^2-1)P_n(x)+\frac{d u}{d x}\left[2(x^2-1)\frac{d P_n(x)}{d x}+2xP_n(x)\right]=0$$

oder nach Division mit $\frac{d u}{d x}(x^2-1)P_n(x)$ auf

$$\text{(12b)}\quad \frac{d\log\left(\frac{d u}{d x}\right)}{d x}+2\frac{d\log P_n(x)}{d x}+\frac{d\log(x^2-1)}{d x}=0.$$

(12b) laßt sich integrieren und gibt

$$\text{(13)}\quad \log\left(\frac{d u}{d x}\right)+2\log P_n(x)+\log(x^2-1)=\log K,$$

wenn $\log K$ die Integrationskonstante bezeichnet, daher weiter

$$\text{(13a)}\quad \frac{d u}{d x}\left[P_n(x)\right]^2(x^2-1)=K,$$

$$\text{(13b)}\quad u=K\int\frac{d x}{(x^2-1)\left[P_n(x)\right]^2}+K_1$$

und

(14) $$y = K P_n(x) \int \frac{dx}{(x^2-1)[P_n(x)]^2} + K_1 P_n(x).$$

Diese Lösung ist, da sie zwei willkürliche Konstante K und K_1 enthält, das allgemeine Integral von (6) Aus ihr folgt für $K=0$, $K_1=1$ die schon bekannte partikuläre Lösung $y=P_n(x)$, daneben für $K_1=0$, $K=-1$ eine zweite partikuläre Lösung, die wir einstweilen mit $q_n(x)$ bezeichnen,

(15) $$q_n(x) = -P_n(x) \int \frac{dx}{(x^2-1)[P_n(x)]^2}$$

Es soll zunächst gezeigt werden, daß $q_n(x)$ für $|x|>1$ mit $Q_n(x)$ übereinstimmt. Dazu ist $q_n(x)$ in eine Form zu bringen, die für große Werte von x die Entwicklung der rechten Seite nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{x}$ ermöglicht Dabei ist zu beachten, daß $P_n(x)$ die Form hat

$$P_n(x) = C.\{x^n - a_1 x^{n-2} + a_2 x^{n-4} - ..\},$$

worin

(15a) $$C = \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{n!}$$

ist. Daher kann man (15) so schreiben:

$$q_n(x) = -\frac{1}{C} x^n \left[1 - \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^4} - ..\right] \int \frac{dx}{x^{2n+2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left[1 - \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^4} - ..\right]^2}.$$

Für große Werte von $|x|$ kann man den Ausdruck

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left[1 - \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^4} - .\right]^2}$$

nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{x}$ entwickeln

$$= 1 + \frac{\beta_1}{x^2} + \frac{\beta_2}{x^4} + ..,$$

eine Reihe, die sicher konvergiert, wenn $|x|$ groß genug gewählt wird. Für derartige Werte von x wird also

$$(15\text{b})\quad q_n(x) = -\frac{1}{C}\cdot x^n\left[1-\frac{\alpha_1}{x^2}-\frac{\alpha_2}{x^4}-\cdots\right]\cdot\int\limits_\infty^x dx\left[\frac{1}{x^{2n+2}}+\frac{\beta_1}{x^{2n+4}}+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{2n-1}x^n\left[1-\frac{\alpha_1}{x^2}-\frac{\alpha_2}{x^4}-\cdots\right]\left\{\frac{1}{x^{2n-1}}+\frac{2n+1}{2n+3}\frac{\beta_1}{x^{2n+3}}+\cdots\right\},$$

und hieraus erkennt man, daß die Funktion $q_n(x)$ für $x=\infty$ verschwindet. Nach dem, was am Schluß von No b (S. 41) bemerkt ist, muß daher für alle $|x|>1$

$$(16)\qquad q_n(x) = C'\cdot Q_n(x)$$

sein. Um C' zu bestimmen, multipliziere man (16) mit x^{n-1} und gehe zur Grenze für $x=\infty$ über, so wird

$$(16\text{a})\qquad \lim_{x=\infty}\left[x^{n-1}q_n(x)\right] = C'\cdot\lim_{x=\infty}\left[x^{n-1}Q_n(x)\right].$$

Nun folgt aus (15a und b)

$$\lim_{x=\infty}\left[x^{n-1}q_n(x)\right] = \frac{1}{(2n-1)C} = \frac{n!}{1\cdot 3\ldots(2n+1)},$$

und aus Gleichung (10c) S. 41 ergibt sich für

$$\lim_{x=\infty}\left[x^{n-1}Q_n(x)\right]$$

derselbe Wert. Somit geht (16a) in

$$1 = C'$$

über, und es ist für $|x|>1$

$$q_n(x) = Q_n(x).$$

Mit dem Ausdruck (15) ist ein zweites partikuläres Integral der Differentialgleichung (6) gefunden, und zwar stellt (15) dieses zweite partikuläre Integral auch für Werte von $|x|<1$ dar, während zugleich für $|x|>1$ die Funktionen q_n und Q_n identisch werden. Die Funktion q_n ist also von beiden die umfassendere, sie enthält Q_n als besonderen Fall. Da es üblich ist, das zweite partikuläre Integral von (6) für alle x mit $Q_n(x)$ zu bezeichnen, so wollen wir von jetzt ab statt $q_n(x)$ setzen $Q_n(x)$, d. h. wir wollen $Q_n(x)$ nicht, wie vorher, durch die Reihe (10c), sondern durch das Integral (15) definieren; für $|x|>1$ gilt nach dem Gesagten doch die Reihe (10c).

d) Folgerungen aus der Integralstellung von $Q_n(x)$. Rekursionsformeln für $Q_n(x)$

Aus dem Integral (15) für $Q_n(x)$ ergibt sich, daß $Q_n(x)$ für $x=+1$ und $x=-1$ logarithmisch unendlich wird, während $Q_n(x)$ für alle übrigen endlichen Werte von x endlich ist.

Um das nachzuweisen, zerlegen wir die zu integrierende Funktion von (15) in Partialbrüche. Da die Gleichung $P_n(x)=0$ lauter reelle, voneinander verschiedene Wurzeln hat, die mit $x_1, x_2, \ldots, x_\iota, \ldots, x_n$ bezeichnet werden mögen, so ist

$$P_n(x)=C(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

wo die Konstante C dieselbe ist, wie oben [Gl. (15a), S. 43], und die Partialbruchzerlegung hat die Form

$$\frac{-1}{(x^2-1)[P_n(x)]^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\sum_{\iota=1}^{n}\frac{A_\iota}{(x-x_\iota)^2}+\sum_{\iota=1}^{n}\frac{B_\iota}{x-x_\iota}. \tag{17}$$

Multipliziert man (17) mit x^2-1, setzt nachher $x=+1$, resp. $x=-1$ und beachtet, daß $P_n(1)=1$, $P_n(-1)=(-1)^n$ ist, so folgt

$$a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}. \tag{17a}$$

Multipliziert man ferner (17) mit $(x-x_\iota)^2$, so wird

$$\frac{-1}{x^2-1}\cdot\left(\frac{x-x_\iota}{P_n(x)}\right)^2=A_\iota+B_\iota(x-x_\iota)+(x-x_\iota)^2\{\ldots\}, \tag{17b}$$

wo durch $\{\ldots\}$ eine Summe angedeutet ist, deren einzelne Summanden für $x=x_\iota$ endlich bleiben. Nun ist

$$\left(\frac{P_n(x)}{x-x_\iota}\right)_{x=x_\iota}=P_n'(x_\iota),$$

falls $P_n'(x)$ den Differentialquotienten von $P_n(x)$ bezeichnet. Setzt man daher in (17b) $x=x_\iota$, so ergibt sich

$$A_\iota=\frac{-1}{x_\iota^2-1}\cdot\frac{1}{[P_n'(x_\iota)]^2}. \tag{17c}$$

Um B_ι zu erhalten, differentiiere man (17b) nach x:

$$\text{(17d)}\quad \frac{2x}{(x^2-1)^2}\left[\frac{x-x_\iota}{P_n(x)}\right]^2 - \frac{2}{x^2-1}\left(\frac{x-x_\iota}{P_n(x)}\right)\cdot\frac{P_n(x)-(x-x_\iota)P_n'(x)}{[P_n(x)]^2}$$
$$= B_\iota + 2(x-x_\iota)\{\ldots\} + (x-x_\iota)^2\frac{d\{\ldots\}}{dx}$$

und setze hierin $x=x_\iota$. Der Bruch

$$\frac{P_n(x)-(x-x_\iota)P_n'(x)}{[P_n(x)]^2}$$

nimmt für $x=x_\iota$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Um den wahren Wert zu erhalten, ist Zähler und Nenner nach x zu differentiieren und nachher erst $x=x_\iota$ zu setzen. Das gibt

$$-\left(\frac{(x-x_\iota)P_n''(x)}{2P_n(x)P_n'(x)}\right)_{x=x_i} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{P_n'(x_\iota)}\cdot\frac{P_n''(x_\iota)}{P_n'(x_\iota)}.$$

Für $x=x_i$ geht somit (17d) in folgende Gleichung über:

$$\frac{2x_\iota}{(x_i^2-1)^2}\frac{1}{[P_n'(x_\iota)]^2}+\frac{2}{x_\iota^2-1}\cdot\frac{1}{P_n'(x_\iota)}\cdot\frac{1}{2}\frac{P_n''(x_\iota)}{[P_n'(x_\iota)]^2}=B_i$$

oder

$$\text{(17e)}\quad B_\iota(x_\iota^2-1)^2[P_n'(x_\iota)]^3 = 2x_iP_n'(x_\iota)+(x_\iota^2-1)P_n''(x_\iota).$$

Nun gilt für beliebige x die Differentialgleichung (2b), S. 35, die in unserer Schreibweise

$$(x^2-1)P_n''(x)+2xP_n'(x)=n(n+1)P_n(x)$$

lautet; und setzt man hierin $x=x_\iota$, so wird die rechte, daher auch die linke Seite $=0$, mithin folgt aus (17e)

$$\text{(17f)}\qquad B_\iota = 0.$$

Die Partialbruchzerlegung (17) ergibt daher, da alle B_ι verschwinden,

$$\text{(18)}\quad \frac{-1}{(x^2-1)[P_n(x)]^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\sum_{\iota=1}^{n}\frac{A_\iota}{(x-x_\iota)^2},$$

worin die A_ι durch (17c) bestimmt sind, und es wird

$$-\int \frac{dx}{(x^2-1)[P_n(x)]^2} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{x-x_i},$$

und weiter nach (15)

(19) $$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - P_n(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{x-x_i}.$$

Da alle Nenner $x - x_i$ in $P_n(x)$ als Faktoren enthalten sind, so heben sich bei Ausführung der Multiplikation im letzten Summanden der rechten Seite von (19) alle Nenner fort; jener Summand ist also eine ganze Funktion $(n-1)$-ten Grades, die wir mit $R_{n-1}(x)$ bezeichnen wollen. Es ist also

(19a) $$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - R_{n-1}(x).$$

Aus (19a) kann man die zu beweisende Eigenschaft der Funktion $Q_n(x)$ unmittelbar ablesen. — Allerdings ist die Funktion $Q_n(x)$ nicht eindeutig, sondern besitzt die Vieldeutigkeit des Logarithmus. Doch ist diese Vieldeutigkeit insofern beschränkt, als für positive reelle Werte von x, die > 1 sind, der reelle Wert des Logarithmus zu nehmen ist. Übrigens macht die in Rede stehende Vieldeutigkeit für die Anwendungen nichts aus, da bei diesen nur solche Argumente von Q_n auftreten, die reell und größer als 1 sind.

Für die einfachsten Werte des Index n lautet die Gleichung (19a):

(19b) $$\begin{cases} Q_0(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad Q_1(x) = \frac{1}{2}\, x \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 1, \\ Q_2(x) = \frac{1}{2} P_2(x) \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{3x}{2}. \end{cases}$$

Hieraus folgt

(19c) $$2\, Q_2(x) + Q_0(x) = 3\, x\, Q_1(x).$$

Diese Gleichung bildet einen speziellen Fall einer allgemeinen Rekursionsformel, die der Formel (31) S. 33 analog ist, nämlich

(20) $$(2n+1)\, x\, Q_n(x) = (n+1)\, Q_{n+1}(x) + n\, Q_{n-1}(x);$$

d. h. die Rekursionsformeln für Q_n und P_n sind identisch, mit einer Ausnahme allerdings. Für $n=0$ wird, wie sich aus (19b) ergibt,

$$Q_1(x) = x\,Q_0(x) - 1, \tag{20a}$$

welche Gleichung mit (31a) S. 33 nicht identisch ist

Die Gleichung (20) leitet man für Werte von $|x|>1$ am einfachsten aus der Reihe (10c) [S. 41] ab, indem man diese mit $(2n+1)\,x$ multipliziert und davon die Reihe für $n\,Q_{n-1}(x)$ abzieht. Dann erhält man nach einer einfachen Reduktion die Reihe für $(n+1)\,Q_{n+1}(x)$. In ähnlicher Art ergibt sich auch die weitere, der Gleichung (30) S. 33 analoge Formel

$$\frac{d\,Q_{n+1}(x)}{d\,x} - \frac{d\,Q_{n-1}(x)}{d\,x} = (2n+1)\,Q_n(x), \tag{21}$$

an deren Stelle jedoch für $n=0$ die folgende, mit (30b) S. 33 nicht identische Formel tritt:

$$\frac{d\,Q_1(x)}{d\,x} = Q_0(x) + x\,\frac{d\,Q_0(x)}{d\,x}. \tag{21a}$$

Zusatz. Aus der Integraldarstellung (15) für $Q_n(x)$ ergibt sich noch folgende Beziehung, die später ihre Anwendung finden wird. Differentiiert man (15), so erhält man

$$\frac{d\,Q_n(x)}{d\,x} = -\frac{1}{(x^2-1)\,P_n(x)} + \frac{d\,P_n(x)}{d\,x}\cdot\frac{1}{P_n(x)}\cdot Q_n(x)$$

oder

$$P_n(x)\,\frac{d\,Q_n(x)}{d\,x} - Q_n(x)\,\frac{d\,P_n(x)}{d\,x} = -\frac{1}{x^2-1}; \tag{22}$$

und diese Gleichung gilt auch für $n=0$.

Bemerkung. Bei der Definition von $Q_n(x)$, die in der Wahl des Wertes -1 für die Konstante K [S. 43] liegt, habe ich mich Heine angeschlossen. F. Neumann wählt für K den doppelten Wert, so daß unsere Funktion Q_n die Hälfte der F. Neumannschen Funktion Q_n ist.

Andere die Funktion Q_n betreffende Formeln übergehe ich hier; eine von (15) verschiedene Integraldarstellung dieser Funktion wird sich gelegentlich der Anwendungen in Abschnitt III, Kap. 1 ergeben.

e) Die Differentialgleichung der Kugelfunktionen für den Fall, daß der Parameter n keine ganze Zahl ist.

Ist vermöge der Definition von $P_n(x)$, aus der die Differentialgleichung (6) S. 38 abgeleitet ist, der Parameter n auch auf ganzzahlige positive Werte beschrankt, so kann man hinterher doch die Untersuchung auf Differentialgleichungen ausdehnen, die dieselbe Form wie jene Gleichung (6) haben, in denen aber n ganz beliebige Werte annehmen kann. Hier stellt sich nun zwischen dem Falle, in dem n eine ganze Zahl, und dem, in dem n keine ganze Zahl ist, ein wesentlicher Unterschied heraus. Während nämlich für ganzzahlige n die Gleichung (6) eine partikuläre Lösung $P_n(x)$ besitzt, die sowohl für $x = +1$, als $x = -1$ endlich ist, gilt ein Gleiches nicht mehr, falls n keine ganze Zahl ist. In diesem Falle existiert keine Lösung von (6), die gleichzeitig für $x = +1$ und $x = -1$ endlich ist; vielmehr wird diejenige partikuläre Lösung von (6), die für $x = +1$ endlich ist, fur $x = -1$ unendlich; und umgekehrt wird die partikuläre Lösung, die für $x = -1$ endlich ist, für $x = +1$ unendlich.

Beweis. Wir entwickeln die Lösung der Gleichung

$$(23) \qquad (1-x^2)\frac{d^2 y}{d x^2} - 2x\frac{d y}{d x} + \varrho(\varrho+1)y = 0,$$

in der ϱ eine beliebige Zahl sei [für reelle ϱ können wir uns auf positive Werte von ϱ beschränken, da das Produkt $\varrho(\varrho+1)$ für $\varrho = k$ und $\varrho = -(k+1)$ denselben Wert hat], nicht nach Potenzen von x, sondern nach Potenzen von $1-x$. Das geschieht am einfachsten, indem wir an Stelle von x die neue Veränderliche z durch die Substitution

$$(24) \qquad z = \frac{1-x}{2}$$

einführen. Dann geht (23) in

$$(25) \qquad z(1-z)\frac{d^2 y}{d z^2} + (1-2z)\frac{d y}{d z} + \varrho(\varrho+1)y = 0$$

über. Wir suchen eine Lösung dieser Gleichung, die nach steigenden Potenzen von z fortschreitet:

$$(26)\qquad y = A_0 z^{\alpha} + A_1 z^{\alpha+1} + A_2 z^{\alpha+2} + \dots + A_k z^{\alpha+k} + \dots$$

Die Einsetzung des Ausdrucks (26) in (25) ergibt

$$\begin{aligned} \alpha^2 A_0 z^{\alpha-1} &+ (\alpha+1)^2 A_1 z^{\alpha} + \dots + (\alpha+k)^2 A_k z^{\alpha+k-1} + \dots \\ &- [\alpha(\alpha-1) A_0 z^{\alpha} + (\alpha+1)\alpha A_1 z^{\alpha+1} + \dots \\ &+ (\alpha+k)(\alpha+k-1) A_k z^{\alpha+k} + \dots] \\ &+ \varrho(\varrho+1)[A_0 z^{\alpha} + A_1 z^{\alpha+1} + \dots + A_k z^{\alpha+k} + \dots] = 0; \end{aligned}$$

und damit diese Gleichung für beliebige z gilt, müssen die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von z verschwinden, also

$$(27)\qquad \left.\begin{aligned} \alpha^2 A_0 &= 0, \\ (\alpha+1)^2 A_1 - [\varrho(\varrho+1) - \alpha(\alpha+1)] A_0 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ (\alpha+k)^2 A_k - [\varrho(\varrho+1) - (\alpha+k-1)(\alpha+k)] A_{k-1} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}\right\}$$

Die erste dieser Bedingungen erfordert

$$(28)\qquad \alpha = 0;$$

denn $A_0 = 0$ würde $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, ..., $A_k = 0$, ..., also $y = 0$ zur Folge haben. Die übrigen Bedingungen (27) nehmen daher die Form an

$$(28\text{a})\qquad \left\{\begin{aligned} &1^2 \cdot A_1 - \varrho(\varrho+1) A_0 = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ &k^2 \cdot A_k + (\varrho+k)(\varrho+1-k) A_{k-1} = 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

und daraus folgt

$$(28\text{b})\qquad A_k = (-1)^k \frac{(\varrho+1)(\varrho+2)\dots(\varrho+k)\,\varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-k+1)}{1^2 \cdot 2^2 \dots k^2} A_0 .$$

Aus (28b) erkennt man, daß, falls ϱ eine ganze positive Zahl ist, die Reihe bei $k = \varrho$ abbricht; denn für $k = \varrho + 1$ wird $A_k = 0$; und für negative ganze Zahlen ϱ würde die Reihe bei $k = -(\varrho + 1)$ abbrechen. Für den Fall, daß ϱ

eine ganze positive Zahl $= n$ ist, ergibt sich also die Lösung

$$(29) \quad y = A_0 \left\{ 1 - \frac{(n+1)\,n}{1^2} z + \frac{(n+1)(n+2)\,n\,(n-1)}{1^2 \cdot 2^2} z^2 - \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n) \cdot n\,(n-1)\ldots 1}{1^2 \cdot 2^2 \ldots n^2} z^n \right\}.$$

Das ist eine ganze rationale Funktion n-ten Grades von z und daher von x. Aus den früheren Untersuchungen wissen wir, daß $P_n(x)$ die einzige ganze Funktion ist, die der Differentialgleichung (6) S. 38 [d. i. der Gl. (23) für den Fall $\varrho = n$] genügt. Somit muß die Reihe (29) bis auf einen konstanten Faktor mit $P_n(x)$ übereinstimmen. Für $z = 0$ ist $x = 1$ und $P_n(1) = 1$, daher wird die Reihe (29) für $A_0 = 1$ mit $P_n(x)$ identisch, und wir haben, wenn wir $z = \frac{1}{2}(1 - x)$ setzen, eine neue Reihe für $P_n(x)$ gewonnen.

Ist aber ϱ keine ganze Zahl, so verschwindet, da k eine ganze Zahl bezeichnet, der Zähler von A_k für keinen Wert von k. Die Reihe (26) bricht dann nicht ab.

Um die Konvergenz dieser Reihe zu untersuchen, bilden wir den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder:

$$(30) \quad \frac{A_{k+1}}{A_k} z = -\frac{(\varrho + k + 1)(\varrho - k)}{(k+1)^2} z = + \frac{k\,(k+1) - \varrho\,(\varrho + 1)}{(k+1)^2} z;$$

derselbe ist für hinreichend große k und $|z| < 1$ stets < 1. Für $|z| < 1$ konvergiert daher die Reihe (26).

Um ihr Verhalten für $z = 1$ zu ermitteln, beachte man, daß, falls $k > \varrho\,(\varrho + 1)$ (ϱ werde als reell vorausgesetzt)

$$\frac{k\,(k+1) - \varrho\,(\varrho + 1)}{(k+1)^2} > \frac{k - \varrho\,(\varrho + 1)}{k + 1 - \varrho\,(\varrho + 1)}$$

ist. Nach (30) wird daher

$$(31) \quad \frac{A_{k+1}}{A_k} > \frac{k - \varrho\,(\varrho + 1)}{k + 1 - \varrho\,(\varrho + 1)}.$$

Ist k' die kleinste ganze Zahl, die $> \varrho\,(\varrho + 1)$, so setze man in (31) der Reihe nach $k = k', k' + 1, \ldots, k' + p$, so wird

$$A_{k'+1}[k'+1-\varrho(\varrho+1)] > A_{k'}[k'-\varrho(\varrho+1)],$$
$$\text{-- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- --}$$
$$A_{k'+p}[k'+p-\varrho(\varrho+1)] > A_{k'+p-1}\cdot[k'+p-1-\varrho(\varrho+1)].$$

Ist

$$A_{k'} = \frac{\lambda}{k'-\varrho(\varrho+1)}, \tag{32}$$

so wird also

$$A_{k'+1} > \frac{\lambda}{k'+1-\varrho(\varrho+1)}, \ldots, A_{k'+p} > \frac{\lambda}{k'+p-\varrho(\varrho+1)}, \tag{32a}$$

daher

$$A_{k'}+A_{k'+1}+\ldots+A_{k'+p} > \tag{33}$$
$$\lambda\left\{\frac{1}{k'-\varrho(\varrho+1)}+\frac{1}{k'+1-\varrho(\varrho+1)}+\ldots+\frac{1}{k'+p-\varrho(\varrho+1)}\right\}.$$

In (33) bildet aber der Faktor von λ für $p=\infty$ eine divergente Reihe, d. h.

$$\lim_{p=\infty}(A_{k'}+A_{k'+1}+\ldots+A_{k'+p})=\infty; \tag{34}$$

mithin konvergiert die Reihe (26) nur für $|z|<1$; ist aber für $z=-1$ unendlich groß. Da sich für α nur ein Wert ergeben hat [Gl. (28)], und da den Werten $x=+1$ und $x=-1$ die Werte $z=0$ und $z=-1$ entsprechen, so haben wir folgendes Resultat: Ist ϱ keine ganze Zahl, so hat die Differentialgleichung (23) nur ein partikuläres Integral, das für $1-x<2$ konvergiert; für $1-x=2$ oder $x=-1$ wird dies partikuläre Integral unendlich groß.

Würde man in (23) an Stelle von x die Variable $z_1=\frac{1}{2}(1+x)$ einführen und die Lösung nach steigenden Potenzen von z_1 entwickeln, so würde man eine Reihe erhalten, die für $x=-1$ endlich, für $x=+1$ aber unendlich ist. Daraus folgt also: Für den Fall, daß ϱ keine ganze Zahl ist, hat die Differentialgleichung (23) keine Lösung, die gleichzeitig für $x=+1$ und $x=-1$ endlich ist. Eine Lösung, die für $x=+1$ und $x=-1$ endlich ist, besitzt die Gleichung (23) nur, wenn ϱ gleich einer ganzen Zahl ist.

Kapitel 4.

Die zugeordneten Kugelfunktionen.

a) Definition der zugeordneten Kugelfunktionen.

Wir knüpfen an die Reihe (17), S. 24 an:

$$
(1)\quad (x+\cos\varphi\cdot\sqrt{x^2-1})^n=\frac{1}{2^n . n!}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}
+\frac{2}{2^n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(\sqrt{x^2-1})^\nu}{(n+\nu)!}\,\frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu}}\cos(\nu\varphi),
$$

in der man $+\nu$ mit $-\nu$ vertauschen kann. In (1) ist, wie wir gesehen haben, das erste Glied der rechten Seite $=P_n(x)$. Die Koeffizienten von $\cos(\nu\varphi)$ für $\nu>0$ nennt man nun zugeordnete Kugelfunktionen erster Art und bezeichnet sie, nach Multiplikation mit einem passend gewählten Koeffizienten, mit $P_{n,\nu}(x)$, also

$$
(2)\qquad P_{n,\nu}(x)=c\,(\sqrt{x^2-1})^\nu\,\frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu}}\,,\quad (\nu\leqq n)
$$

Von den beiden Indizes n und ν nennen wir n den Hauptindex und stellen ihn voran, ν den Nebenindex. Der konstante Faktor c soll ferner so bestimmt werden, daß nach Ausführung der $(n+\nu)$-maligen Differentiation die höchste Potenz von x den Faktor 1 hat,*) d. h. daß

$$
c\cdot 2n(2n-1)\ldots(n-\nu+1)=1
$$

---

*) Bei dieser Bestimmung des Faktors c schließe ich mich Heine an, von dem ich nur in der Bezeichnung abweiche, da Heine P_ν^n statt $P_{n,\nu}$ schreibt Abweichend davon definiert F. Neumann die Funktionen $P_{n,\nu}(x)$, die er abgeleitete Kugelfunktionen nennt, durch die Gleichung

$$
P_{n,\nu}(x)=(\sqrt{1-x^2})^\nu\,\frac{d^\nu P_n(x)}{dx^\nu}\,.
$$

Bei Neumann wird also $P_n(x)$ und $P_{n,0}(x)$ identisch, während unsere Definition den Nachteil hat, daß P_n und $P_{n,0}$ nicht identisch sind, sondern sich um einen konstanten Faktor unterscheiden Einfacher werden bei unserer Definition die Reihen für $P_{n,\nu}(x)$, die Grenzwerte von $x^{-n}P_{n,\nu}(x)$ fur $x=\infty$, sowie verschiedene andere Formeln.

oder

$$c = \frac{(n-\nu)!}{(2n)!} \tag{2a}$$

ist, wobei für $n=\nu$, wie üblich, unter $0!$ der Wert 1 zu verstehen ist. Die Jacobische Formel (16), S. 24 kann mittels dieser Bezeichnung auch so geschrieben werden:

$$P_{n,\nu}(x) = P_{n,-\nu}(x).$$

Mit Anwendung der Formel (18), S. 24, kann man Gleichung (2) auch so schreiben:

$$P_{n,\nu}(x) = \frac{(n-\nu)!}{1\cdot 3 \ldots (2n-1)} \left(\sqrt{x^2-1}\right)^\nu \frac{d^\nu P_n(x)}{d x^\nu}, \quad (\nu \leqq n). \tag{2b}$$

Speziell wird

$$P_{n,0}(x) = \frac{n!}{1\cdot 3 \ldots (2n-1)} P_n(x) \text{ und } P_{n,n}(x) = \left(\sqrt{x^2-1}\right)^n. \tag{2c}$$

Nach Einführung der neuen Bezeichnung kann die Reihe (1) so geschrieben werden:

$$\frac{\left[x+\cos\varphi\cdot\sqrt{x^2-1}\right]^n}{n!} = 2\sum_{\nu=0}^{n}{}' \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!} P_{n,\nu}(x)\cos(\nu\varphi), \tag{3}$$

wo durch den Strich an dem Summenzeichen angezeigt werden soll, daß für $\nu=0$ nur die Hälfte des betreffenden Koeffizienten zu nehmen, d. h. der Faktor 2 fortzulassen ist.

Aus der obigen Definition ergibt sich für $P_{n,\nu}(x)$ die Reihe

$$\begin{aligned} P_{n,\nu}(x) = \left(\sqrt{x^2-1}\right)^\nu \Big\{ & x^{n-\nu} - \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{2\cdot(2n-1)} x^{n-\nu-2} \\ & + \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)(n-\nu-2)(n-\nu-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)} x^{n-\nu-4} - \ldots \Big\}, \end{aligned} \tag{4}$$

die, falls $n-\nu$ ungerade ist, mit x^1, wenn aber $n-\nu$ gerade ist, mit x^0 endet. Ferner folgt aus der Gleichung (19), S. 25 folgende, dem Laplaceschen Integral für $P_n(x)$ analoge Integraldarstellung der zugeordneten Kugelfunktionen:

$$P_{n,\nu}(x) = \frac{(n+\nu)!\,(n-\nu)!\,2^n}{(2n)!} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right]^n \cos(\nu\varphi)\, d\varphi. \tag{5}$$

Endlich folgt, wie S. 25—26, daß die Gleichung

$$P_{n,\nu}(x):(\sqrt{x^2-1})^\nu = 0$$

lauter reelle Wurzeln hat, die sämtlich zwischen -1 und $+1$ liegen. Daß die Wurzeln voneinander verschieden sind, ergibt sich, wie S. 35, aus der Gleichung (12), S. 56.

b) Die zugeordneten Kugelfunktionen zweiter Art

Diese hängen in ähnlicher Weise von der Funktion $Q_n(x)$ ab, wie die Zugeordneten erster Art von $P_n(x)$, nur wird dabei dem konstanten Faktor der rechten Seite von (2b) ein anderer Wert erteilt. Wir definieren also die Zugeordneten zweiter Art durch die Gleichung

$$(6)\quad Q_{n,\nu}(x) = (-1)^\nu \frac{1\cdot 3\ldots(2n+1)}{(n+\nu)!}(\sqrt{x^2-1})^\nu \frac{d^\nu Q_n(x)}{dx^\nu}, \; (\nu \leqq n).$$

Setzen wir für $Q_n(x)$ die Reihe (10c), S. 41 ein, so folgt für $|x|>1$ folgende Reihe:

$$(7)\quad Q_{n,\nu}(x) = (\sqrt{x^2-1})^\nu \left\{ \frac{1}{x^{n+\nu+1}} + \frac{(n+\nu+1)(n+\nu+2)}{2.(2n+3)} \frac{1}{x^{n+\nu+3}} \right.$$
$$\left. + \frac{(n+\nu+1)(n+\nu+2)(n+\nu+3)(n+\nu+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)} \frac{1}{x^{n+\nu+5}} + \ldots \right\}.$$

[Die gliedweise Differentiation jener Reihe (10c) ist gestattet, da für $|x|>1$ sowohl diese Reihe, als die daraus durch Differentiation entstehenden absolut konvergieren.] Durch (6) ist aber $Q_{n,\nu}(x)$ nicht nur für Werte von $|x|>1$, sondern für beliebige x definiert. Nimmt man für $Q_n(x)$ den Ausdruck (19a), S. 47, und beachtet, daß der ν-te Differentialquotient von $\frac{1}{2}\lg\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ den Faktor $(x^2-1)^{-\nu}$ hat, so sieht man, daß $Q_{n,\nu}(x)$ einen Summanden mit dem Faktor $(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\nu}$ besitzt, und daß daher für $x=1$ und $x=-1$ die Funktion $Q_{n,\nu}(x)$ unendlich wird.

Ferner folgt aus (7), daß $Q_{n,\nu}(x)$ für $x=\infty$ verschwindet, und daß

$$(8)\quad \lim_{x=\infty} x^{n+1} Q_{n,\nu}(x) = 1.$$

Für $P_{n,\nu}(x)$ lautet die analoge Gleichung:

$$(9) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{P_{n,\nu}(x)}{x^n} = 1.$$

Schließlich mag noch bemerkt werden, daß

$$(10) \qquad Q_{n,0}(x) = \frac{1\cdot 3 \ldots (2n+1)}{n!} Q_n(x)$$

wird.

c) Die Differentialgleichung der zugeordneten Kugelfunktionen. Rekursionsformeln für diese Funktionen.

Differentiiert man die Differentialgleichung (2b), S. 35, der die Funktion $P_n(x)$ genügt, ν-mal, wobei $\nu \leqq n$ sei, so erhält man

$$(11) \qquad (1-x^2)\frac{d^{\nu+2} P_n(x)}{dx^{\nu+2}} - 2(\nu+1)x\frac{d^{\nu+1} P_n(x)}{dx^{\nu+1}} + [n(n+1)-\nu(\nu+1)]\frac{d^\nu P_n(x)}{dx^\nu} = 0.$$

Nach (2b), S. 54 ist aber

$$\frac{d^\nu P_n(x)}{dx^\nu} = C\cdot(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\nu} P_{n,\nu}(x),$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{(n-\nu)!} = C$$

gesetzt wird. Somit kann die Gleichung (11) auch so geschrieben werden:

$$(12) \qquad (x^2-1)\frac{d^2[C\cdot(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\nu} P_{n,\nu}(x)]}{dx^2} + 2(\nu+1)x\frac{d[C\cdot(x-1)^{-\frac{1}{2}\nu} P_{n,\nu}(x)]}{dx} - [n(n+1)-\nu(\nu+1)]\, C\cdot(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\nu} P_{n,\nu}(x) = 0.$$

Führt man die Differentiation aus und multipliziert nachher mit $\frac{1}{C}(x^2-1)^{+\frac{1}{2}\nu}$, so ergibt sich folgende Differentialgleichung für $P_{n,\nu}(x)$:

$$(13)\quad (x^2-1)\frac{d^2 P_{n,\nu}(x)}{d x^2}+2x\frac{d P_{n,\nu}(x)}{d x}-\left[n(n+1)+\frac{\nu^2}{x^2-1}\right]P_{n,\nu}(x)=0,$$

die man auch folgendermaßen schreiben kann:

$$(13\,\mathrm{a})\quad \frac{d\,(1-x^2)\dfrac{d P_{n,\nu}(x)}{d x}}{d x}+\left[n(n+1)-\frac{\nu^2}{1-x^2}\right]P_{n,\nu}(x)=0$$

oder, wenn $x=\cos\vartheta$ gesetzt wird,

$$(13\,\mathrm{b})\quad \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d\sin\vartheta\dfrac{d P_{n,\nu}(\cos\vartheta)}{d\vartheta}}{d\vartheta}+\left[n(n+1)-\frac{\nu^2}{\sin^2\vartheta}\right]P_{n,\nu}(\cos\vartheta)=0.$$

Da $Q_n(x)$ derselben Differentialgleichung wie $P_n(x)$ genügt, und da $Q_{n,\nu}(x)$ ebenso von $Q_n(x)$ abhängt, wie $P_{n,\nu}(x)$ von $P_n(x)$ (nur daß die oben mit C bezeichnete Konstante einen andern Wert hat), so gilt für $Q_{n,\nu}(x)$ dieselbe Differentialgleichung [(13) oder (13a)] wie für $P_{n,\nu}(x)$. Ist daher die Differentialgleichung

$$(14)\quad \frac{d\,(1-x^2)\dfrac{d y}{d x}}{d x}+\left[n(n+1)-\frac{\nu^2}{1-x^2}\right]y=0$$

gegeben, in der n und ν ganze Zahlen sind und $\nu \leqq n$ ist, so sind von dieser zwei partikuläre Integrale bekannt, und ihr allgemeines Integral ist

$$(14\,\mathrm{a})\quad y=k\,P_{n,\nu}(x)+k_1\,Q_{n,\nu}(x),$$

worin k und k_1 willkürliche Konstanten bezeichnen.

Wir sind bisher von den Funktionen $P_{n,\nu}(x)$ und $Q_{n,\nu}(x)$ ausgegangen und haben aus den diese Funktionen definierenden Gleichungen die Differentialgleichung abgeleitet, der beide genügen. Geht man umgekehrt von der Gleichung (14) aus, so setze man, um deren Lösung zu finden,

$$(15)\quad y=\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{\nu}\cdot z,$$

so ergibt sich für z die Gleichung

$$(16)\quad (x^2-1)\frac{d^2 z}{d x^2}+2(\nu+1)x\frac{d z}{d x}-[n(n+1)-\nu(\nu+1)]z=0.$$

Sucht man dieser Gleichung durch eine nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe zu genügen:

$$(17) \qquad z = x^a + A_1 x^{a-1} + A_2 x^{a-2} + \dots,$$

so ergibt sich durch eine ähnliche Rechnung, wie sie S. 38—40 durchgeführt ist, daß

$$a = n - \nu \quad \text{oder} \quad a = -(n+\nu+1)$$

sein muß, und weiter folgen für z zwei Reihen, die mit dem Faktor von $(\sqrt{x^2-1})^\nu$ auf der rechten Seite der Gleichungen (4) und (7) (S. 54, 55) identisch sind. Auf diese Weise kann man also umgekehrt aus (14) jene Reihen (4) und (7) ableiten.

Rekursionsformeln. Multipliziert man die vorstehende Gleichung (11) mit $(\sqrt{x^2-1})^\nu$ und benutzt die Gleichung (2b), die auf ν, $\nu+1$ und $\nu+2$ anzuwenden ist, so ergibt sich folgende Gleichung zwischen drei Zugeordneten mit demselben Hauptindex n und drei aufeinanderfolgenden Werten des Nebenindex ν:

$$(18) \quad (n-\nu-1)P_{n,\nu+2}(x) + \frac{2(\nu+1)x}{\sqrt{x^2-1}}P_{n,\nu+1}(x) = (n+\nu+1)P_{n,\nu}(x)$$
$$(n \geqq \nu+2).$$

Eine andere Formel zwischen drei Zugeordneten mit demselben Nebenindex ν und drei aufeinanderfolgenden Werten des Hauptindex n leitet man folgendermaßen ab. Man differentiiere die Gleichung (31), S. 33, ν-mal nach x, wodurch

$$(2n+1)x\frac{d^\nu P_n(x)}{dx^\nu} + \nu(2n+1)\frac{d^{\nu-1}P_n(x)}{dx^{\nu-1}} = (n+1)\frac{d^\nu P_{n+1}(x)}{dx^\nu}$$
$$+ n\frac{d^\nu P_{n-1}(x)}{dx^\nu}$$

entsteht, und setze darin

$$(2n+1)\frac{d^{\nu-1}P_n(x)}{dx^{\nu-1}} = \frac{d^\nu P_{n+1}(x)}{dx^\nu} - \frac{d^\nu P_{n-1}(x)}{dx^\nu},$$

welche Gleichung aus (30), S. 33, folgt, so wird

$$(2n+1)x\frac{d^\nu P_n(x)}{dx^\nu} = (n+1-\nu)\frac{d^\nu P_{n+1}(x)}{dx^\nu} + (n+\nu)\frac{d^\nu P_{n-1}(x)}{dx^\nu}.$$

Letztere Gleichung multipliziere man mit $(\sqrt{x^2-1})'$ und wende (2b) auf $n, n-1, n-1$ an, so erhält man

$$(19)\qquad x P_{n,\nu}(x) = P_{n-1,\nu}(x) + \frac{(n+\nu)(n-\nu)}{(2n+1)(2n-1)} P_{n-1,\nu}(x) \qquad (\nu \leqq n-1).$$

Da die für die $P_n(x)$ benutzten Hilfsformeln auch für die $Q_n(x)$ gelten (vgl. S. 47—48), so kann man die zu (18) und (19) analogen Rekursionsformeln für die Funktionen $Q_{n,\nu}$ in derselben Art herleiten.

d) Integralsätze für die Zugeordneten erster Art.

Den Seite 26ff. abgeleiteten Integralsätzen für die Funktionen $P_n(x)$ lassen sich analoge Sätze für die Zugeordneten zur Seite stellen. Wir betrachten zunächst zwei Funktionen $P_{n,\nu}(x)$ und $P_{m,\nu}(x)$, die denselben Nebenindex ν, aber verschiedene Hauptindizes n, m haben. Dabei ist ν kleiner oder gleich der kleineren der beiden Zahlen n, m. Dann gilt folgender Satz:

$$(20)\qquad \int_{-1}^{+1} P_{n,\nu}(x)\, P_{m,\nu}(x)\, dx = 0,$$

falls $m \lesseqgtr n$.

Beweis. Für $P_{n,\nu}(x)$ gilt die Differentialgleichung (13a), S. 57. Multipliziert man diese mit $P_{m,\nu}(x)$, zieht dann von dem Produkt die Differentialgleichung ab, der $P_{m,\nu}(x)$ genügt, nachdem man diese mit $P_{n,\nu}(x)$ multipliziert hat, so erhält man

$$(21)\quad P_{m,\nu} \frac{d(1-x^2)\frac{dP_{n,\nu}}{dx}}{dx} - P_{n,\nu} \frac{d(1-x^2)\frac{dP_{m,\nu}}{dx}}{dx} + [n(n+1)-m(m+1)]\, P_{n,\nu} P_{m,\nu} = 0.$$

(Der Kürze halber sind die Argumente x in $P_{n,\nu}$ und $P_{m,\nu}$ fortgelassen.) Die Gleichung (21) integriere man nun nach x zwischen den Grenzen -1 und $+1$, so ergibt sich, wenn man die beiden ersten Summanden teilweise integriert:

$$(21\text{a})\quad \left[P_{m,\nu}\cdot(1-x^2)\frac{d\,P_{n,\nu}}{d\,x}-P_{n,\nu}\,(1-x^2)\frac{d\,P_{m,\nu}}{d\,x}\right]_{-1}^{+1}$$

$$-\int_{-1}^{+1}\frac{d\,P_{m,\nu}}{d\,x}(1-x^2)\frac{d\,P_{n,\nu}}{d\,x}\,d\,x+\int_{-1}^{+1}\frac{d\,P_{n,\nu}}{d\,x}(1-x^2)\frac{d\,P_{m,\nu}}{d\,x}\,d\,x$$

$$-\left[n\,(n+1)-m\,(m+1)\right]\int_{-1}^{+1}P_{n,\nu}\,P_{m,\nu}\,d\,x=0\,.$$

In (21a) verschwindet der erste Summand der linken Seite nach Einsetzen der Grenzen $x=-1$ und $x=+1$; die beiden folgenden Summanden heben sich auf. Mithin muß der letzte Summand für sich verschwinden. Sein erster Faktor $[n\,(n+1)-m\,(m+1)]$ verschwindet aber nicht, falls $m \gtrless n$, also muß der zweite Faktor $=0$ werden, und das ist die zu beweisende Gleichung.

Für den Fall $m=n$ verschwindet der erste Faktor des letzten Summanden von (21a), diese Gleichung wird dann identisch erfüllt. Das Integral der linken Seite von (20) kann in diesem Falle nicht verschwinden, da die zu integrierende Funktion dann ein Quadrat, das Integral die Summe von lauter positiven Summanden ist. Um den Integralwert für $m=n$ zu ermitteln, benutzen wir die Formel (2)

$$P_{n,\nu}(x)=\frac{(n-\nu)!}{(2\,n)!}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{\nu}\frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{d\,x^{n+\nu}},$$

wofür nach dem **Jacobischen** Satze [Gl. (16), S. 24] auch

$$P_{n,\nu}(x)=\frac{(n+\nu)!}{(2\,n)!}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{-\nu}\frac{d^{n-\nu}(x^2-1)^n}{d\,x^{n-\nu}}$$

gesetzt werden kann. Multipliziert man diese Gleichungen und integriert, so kommt

$$(22)\quad \int_{-1}^{+1}\left[P_{n,\nu}(x)\right]^2d\,x=C\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{d\,x^{n+\nu}}\,\frac{d^{n-\nu}(x^2-1)^n}{d\,x^{n-\nu}}\,d\,x\,,$$

wo zur Abkürzung

$$(22\text{a})\qquad C=\frac{(n+\nu)!\,(n-\nu)!}{(2\,n)!\,(2\,n)!}$$

gesetzt ist. Für $\nu=0$ ist der Wert des Integrals (22) früher ermittelt (S. 28). Für $\nu>0$ integriere man teilweise, so wird

$$(23)\quad \int_{-1}^{+1}\left[P_{n.\nu}(x)\right]^2 dx = C\left(\frac{d^{n+\nu-1}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu-1}}\,\frac{d^{n-\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n-\nu}}\right)_{-1}^{+1}$$
$$-C\int_{-1}^{+1}\frac{d^{n+\nu-1}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu-1}}\,\frac{d^{n-\nu-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-\nu-1}}\,dx.$$

Nun hat der $(n-\nu)$-te Differentialquotient von $(x^2-1)^n$ den Faktor $(x^2-1)^\nu$, verschwindet daher für $x=\pm 1$, da $\nu>0$. Integriert man weiter noch $(\nu-1)$-mal teilweise, so gilt analoges, und es ergibt sich

$$(23\text{a})\quad \int_{-1}^{+1}\left[P_{n,\nu}(x)\right]^2 dx = (-1)^\nu\, C\int_{-1}^{+1}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx$$
$$=(-1)^\nu\, C\,.\,(2^n\,.\,n!)^2\int_{-1}^{+1}P_n(x)\,P_n(x)\,dx$$
$$=(-1)^\nu\, C\,.\,(2^n\,.\,n!)^2\cdot\frac{2}{2n+1}$$

[nach (18), S. 24 und (20a), S. 26]. Da

$$\frac{2^n\,.\,n!}{(2n)!}=\frac{1}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}$$

ist, so geht (23a), wenn man für C seinen Wert (22a) setzt, in

$$(24)\quad \int_{-1}^{+1}\left[P_{n.\nu}(x)\right]^2 dx = (-1)^\nu\frac{(n+\nu)!\,(n-\nu)!}{[1\cdot 3\ldots(2n-1)]^2}\cdot\frac{2}{2n+1}$$

über, eine Formel, die ohne weiteres auch für $\nu=0$ gilt [vgl. Gl. (2c), S. 54].

Zusatz. Für die Zugeordneten gilt noch ein anderer Integralsatz, in dem das Produkt zweier Funktionen mit

gleichem Hauptindex und verschiedenen Nebenindizes auftritt.

$$\int_{-1}^{+1} P_{n,\nu}(x)\, P_{n,\mu}(x)\, \frac{dx}{1-x^2} = 0, \quad (\nu \gtrless \mu),$$

der sich genau wie Gleichung (20), S. 59 ableiten läßt.

e) Die Differentialgleichung der Zugeordneten für $\nu > n$.

Die Definition von $P_{n,\nu}(x)$ (s. S. 53) setzt voraus, daß ν eine positive ganze Zahl $\leqq n$ ist. Für $\nu > n$ verschwindet der $(n-\nu)$-te Differentialquotient von $(x^2-1)^n$ und mit ihm $P_{n,\nu}(x)$.

Geht man aber von der Differentialgleichung (14), S. 57 aus, so kann man in dieser dem Parameter ν auch Werte erteilen, die $> n$ sind. Um das Verhalten der Integrale jener Gleichung (14) fur diesen Fall zu untersuchen, führen wir darin an Stelle von x die unabhängige Veränderliche z ein durch die Substitution

$$z = \frac{1-x}{2}, \tag{25}$$

so geht jene Gleichung in

$$\frac{d\left(z(1-z)\frac{dy}{dz}\right)}{dz} + \left[n(n+1) - \frac{\nu^2}{4z(1-z)}\right] y = 0 \tag{26}$$

über. Weiter führen wir auch an Stelle von y eine neue abhängige Veränderliche u durch die Substitution

$$y = \left(\frac{1-z}{z}\right)^{\frac{1}{2}\nu} \cdot u \tag{27}$$

ein, so ergibt sich aus (26) für u die Gleichung

$$z(1-z)\frac{d^2 u}{dz^2} - \left[\nu - 1 - 2z\right]\frac{du}{dz} - n(n+1)\, u = 0. \tag{28}$$

Soll dieser Gleichung durch die nach fallenden Potenzen von z fortschreitende Reihe

$$u = z^{\alpha} + C_1 z^{\alpha-1} + C_2 z^{\alpha-2} + \dots + C_k z^{\alpha-k} + \dots \tag{29}$$

genügt werden, so müssen nach Einsetzen von (29) in (28) die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von z verschwinden.

Das gibt folgende Relationen:

$$(30)\quad \begin{cases} n(n+1) - a(a+1) = 0, \\ [n(n+1) - (a-k)(a+1-k)]\,C_k \\ \qquad\qquad + (a-k+1)(a-k+1-\nu)\,C_{k-1} = 0, \end{cases}$$

wobei $C_0 = 1$ ist. Die erste Gleichung (30) erfordert, daß

$$a = n \quad \text{oder} \quad a = -(n+1)$$

wird. Nehmen wir zuerst

$$(30\text{a})\qquad a = n,$$

so folgt aus der zweiten Gleichung (30) für beliebige k

$$(30\text{b})\qquad k(2n+1-k)\,C_k = -(n+1-k)(n-\nu+1-k)\,C_{k-1}.$$

Nach (30b) wird $C_k = 0$, wenn k entweder $= n-\nu+1$ oder $= n+1$ wird. Ist nun zunächst $\nu \leqq n$, so ist $n-\nu+1$ eine positive Zahl $< n+1$, die Zahl k, die von 1 ab wächst, erreicht von den vorstehenden beiden Werten, für die $C_k = 0$ wird, zuerst den ersten, d. h. es ist

$$C_{n-\nu+1} = 0,$$

und ebenso verschwinden wegen (30b) alle folgenden C.

Die Reihe (29) hat daher die Form

$$(31)\qquad u = z^n + C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} + \ldots + C_{n-\nu} z^\nu, \quad (\nu \leqq n).$$

[Für $\nu = n$ wird $u = z^n$].

Ist dagegen ν eine ganze Zahl $> n$, so ist $n-\nu+1$ negativ oder gleich Null, $n-\nu+1-k$ verschwindet für keinen Wert von k, da ja k positiv ist; C_k wird dann $= 0$ nur für $k = n+1$, d. h. es ist

$$C_{n+1} = 0,$$

und die Reihe (29) hat die Form

$$(32)\qquad u = z^n + C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} + \ldots + C_n, \quad (\nu > n).$$

Aus (27) ergibt sich im ersten Falle für y eine Reihe von der Form

(31a) $$y=(1-z)^{\frac{1}{2}\nu}\left[z^{n-\frac{1}{2}\nu}-C_1 z^{n-1-\frac{1}{2}\nu}-C_2 z^{n-2-\frac{1}{2}\nu}-\dots+C_{n-\nu} z^{\frac{1}{2}\nu}\right]$$
$$(\nu\leqq n),$$

im zweiten Falle dagegen wird

(32a) $$y=(1-z)^{\frac{1}{2}\nu}\left[z^{n-\frac{1}{2}\nu}-C_1 z^{n-1-\frac{1}{2}\nu}-\dots-C_n z^{-\frac{1}{2}\nu}\right]$$
$$(\nu>n).$$

Zwischen den Reihen (31a) und (32a) besteht folgender Unterschied. Die erstere verschwindet, falls $\nu>0$, sowohl für $z=1$, als für $z=0$ [und falls $\nu=0$, ist sie für $z=1$ und $z=0$ endlich]; die zweite Reihe verschwindet zwar auch für $z=1$, wird aber für $z=0$ wegen der in ihr enthaltenen negativen Potenzen von z unendlich.

Nimmt man für α den zweiten möglichen Wert

(33) $$\alpha=-(n-1),$$

so tritt, wie sich aus (30) ergibt, an Stelle der Gleichung (30b) die folgende:

(33a) $$k(2n-1-k)\,C_k=(n-k)(n+k+\nu)\,C_{k-1},$$

aus der man erkennt, daß, da n, ν, k positive ganze Zahlen sind, keiner der Koeffizienten verschwindet, daß sich also für u eine unendliche Reihe der Form

(34) $$u=z^{-(n-1)}-C_1 z^{-(n-2)}-C_2 z^{-(n-3)}+\dots \text{(in infin.)}$$

ergibt, und diese wird für $z=0$ unendlich, um so mehr y. Auch für $z=1$ wird die Reihe u unendlich; y hat dann die unbestimmte Form $0\cdot\infty$. Auf die nähere Untersuchung dieser Unbestimmtheit soll hier nicht eingegangen werden.]

Aus allem Gesagten sehen wir, wenn wir von dem Fall $\nu=0$ absehen, in dem die Differentialgleichung (14), S. 57 in die der einfachen Kugelfunktionen übergeht, daß zwischen den Fällen $\nu\leqq n$ und $\nu>n$ der folgende wesentliche Unterschied besteht: Ist $0<\nu\leqq n$, so hat die Gleichung (26) ein und nur ein partikuläres Integral, das für $z=0$ und $z=1$ verschwindet. Ist dagegen $\nu>n$, so hat (26) kein partikuläres Integral, das zugleich für $z=0$ und $z=1$ verschwindet. Vielmehr wird dasjenige partikuläre Integral, das für $z=1$ verschwindet, für $z=0$ unendlich groß.

Da (26) nur eine andere Form der Differentialgleichung (14), S. 57 ist, und da den Werten $z=0$ und $z=1$ nach (25) die Werte $x=1$ und $x=-1$ entsprechen, so hat auch diese Gleichung nur für den Fall $\nu \leqq n$ ein partikuläres Integral, das gleichzeitig für $x=+1$ und $x=-1$ verschwindet [im Falle $\nu=0$ endlich bleibt], während für $\nu > n$ kein derartiges Integral existiert, vielmehr dasjenige, das für $x=-1$ verschwindet, für $x=+1$ unendlich wird, und umgekehrt dasjenige, das für $x=+1$ verschwindet für $x=-1$ unendlich wird.

Das letztgenannte Resultat ergibt sich, wenn man in (14), S 57 an Stelle von x die unabhängige Veränderliche

$$z'=\frac{1+x}{2}$$

einführt und ebenso verfahrt wie oben.

Zusatz. Falls in der Differentialgleichung (26) zwar ν eine ganze Zahl >0, n aber keine ganze Zahl ist, so folgt aus der Rekursionsformel (30), daß weder die für $a=n$, noch die für $a=-(n+1)$ sich ergebende Reihe abbricht. Beide Reihen enthalten negative Potenzen von z und werden für $z=0$ unendlich. Demnach wird auch für die Differentialgleichung der Zugeordneten, falls in ihr n keine ganze Zahl ist, das Integral, das für $x=-1$ verschwindet, für $x=+1$ unendlich groß, und umgekehrt.

Kapitel 5.

Die Kugelfunktionen mit zwei Veränderlichen.

a) Das Additionstheorem der Kugelfunktionen.

Auf die Kugelfunktionen sind wir durch Entwicklung der in räumlichen Polarkoordinaten ausgedrückten reziproken Entfernung zweier Punkte geführt. In dieser Entwicklung [s. Gl. (2), S. 11] tritt die Kugelfunktion P_n mit dem zusammengesetzten Argument

$$(1) \qquad \cos\gamma=\cos\vartheta\cos\vartheta_1+\sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1)$$

auf. Hier bietet sich naturgemäß die Aufgabe dar, $P_n(\cos\gamma)$ durch Funktionen auszudrücken, die allein ϑ, ϑ_1

und $\varphi - \varphi_1$ als Argumente enthalten. Dazu leiten wir eine partielle Differentialgleichung ab, der $P_n(\cos\gamma)$, als Funktion von ϑ und φ betrachtet, genügt. Diese ergibt sich daraus, daß $1 | \varrho$ der Laplaceschen Gleichung genügt, die, auf räumliche Polarkoordinaten transformiert, nach (12), S. 7

$$(2)\qquad \frac{\partial\, r^2 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \varphi^2} = 0$$

lautet. Setzen wir in diese Gleichung eine der beiden Reihen (2), S. 11 ein, so folgt [genau wie S. 37—38 bei der zweiten Ableitung der Differentialgleichung für $P_n(\cos\vartheta)$] für $P_n(\cos\gamma)$ die Gleichung

$$(3)\qquad \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta \frac{\partial P_n(\cos\gamma)}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 P_n(\cos\gamma)}{\partial \varphi^2} + n(n+1)\,P_n(\cos\gamma) = 0;$$

und einer Gleichung von genau derselben Form genügt $P_n(\cos\gamma)$, als Funktion von ϑ_1 und φ_1 betrachtet.

Ehe wir an diese Differentialgleichung Schlüsse knüpfen, wollen wir die Aufgabe in ähnlicher Weise verallgemeinern, wie die Grundaufgabe S. 9 verallgemeinert ist, indem wir an Stelle von $\cos\vartheta$ und $\cos\vartheta_1$ neue Größen x und x_1 einführen, deren absolute Werte auch > 1 sein können, während die Winkel φ und φ_1 beibehalten werden. Wir stellen uns also die Aufgabe, $P_n(z)$ mit dem zusammengesetzten Argumente*)

$$(4)\qquad z = x x_1 - \sqrt{x^2-1}\,\sqrt{x_1^2-1}\,\cos(\varphi - \varphi_1)$$

durch Funktionen der einzelnen Argumente x, x_1, $\varphi - \varphi_1$ auszudrücken, und zeigen zu dem Zwecke zunächst, daß $P_n(z)$ auch für $|x| > 1$ der Differentialgleichung genügt, die aus (3) entsteht, wenn man darin $x = \cos\vartheta$ an Stelle von ϑ als unabhängige Variable einführt.

---

*) Fur $\cos\vartheta = x$, $\cos\vartheta_1 = x_1$ ist $\sin\vartheta = \sqrt{1-x^2} = i\sqrt{x^2-1}$,

$$\sin\vartheta \,.\, \sin\vartheta_1 = -\sqrt{x^2-1}\,\sqrt{x_1^2-1},$$

daher das Zeichen — in z

Nach den Regeln der Differentialrechnung ist

$$(x^2-1)\frac{\partial^2 P_n(z)}{\partial x^2}+2x\frac{\partial P_n(z)}{\partial x}$$

$$=(x^2-1)\left[\frac{d^2 P_n(z)}{dz^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{dP_n(z)}{dz}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]+2x\frac{dP_n(z)}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial^2 P_n(z)}{\partial\varphi^2}=\frac{d^2 P_n(z)}{dz^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{dP_n(z)}{dz}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}.$$

Setzt man hierin die sich aus (4) ergebenden Werte der partiellen Ableitungen von z ein, so wird

$$(5)\quad (x^2-1)\frac{\partial^2 P_n(z)}{\partial x^2}+2x\frac{\partial P_n(z)}{\partial x}+\frac{1}{x^2-1}\frac{\partial^2 P_n(z)}{\partial\varphi^2}$$

$$=\frac{d^2P_n(z)}{dz^2}\left\{\left[x_1\sqrt{x^2-1}-x\sqrt{x_1^2-1}\cos(\varphi-\varphi_1)\right]^2+(x_1^2-1)\sin^2(\varphi-\varphi_1)\right\}$$

$$+\frac{dP_n(z)}{dz}\left\{\frac{\sqrt{x_1^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\cos(\varphi-\varphi_1)+2xx_1-\frac{2x^2\sqrt{x_1^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\cos(\varphi-\varphi_1)\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{x_1^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\cos(\varphi-\varphi_1)\right\}.$$

In (5) kann der Faktor von $\frac{d^2 P_n(z)}{dz^2}$ so geschrieben werden:

$$\left[xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos(\varphi-\varphi_1)\right]^2-1=z^2-1,$$

und der Faktor von $\frac{dP_n(z)}{dz}$:

$$2\left[xx_1-\frac{(x^2-1)\sqrt{x_1^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\cos(\varphi-\varphi_1)\right]=2z,$$

so daß die rechte Seite von (5)

$$(5\text{a})\qquad (z^2-1)\frac{d^2 P_n(z)}{dz^2}+2z\frac{dP_n(z)}{dz}$$

wird. Der Ausdruck (5a) ist aber, da $P_n(z)$, als Funktion

von z betrachtet, der Differentialgleichung der einfachen Kugelfunktionen genügt [Gl. (2), S. 34],

$$= n(n+1) P_n(z).$$

Mithin wird die Gleichung (5):

$$(6) \quad (x^2-1)\frac{\partial^2 P_n(z)}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial P_n(z)}{\partial x} + \frac{1}{x^2-1}\frac{\partial^2 P_n(z)}{\partial \varphi^2} = n(n+1) P_n(z)$$

oder auch

$$(6a) \quad \frac{\partial (1-x^2)\frac{\partial P_n(z)}{\partial x}}{\partial x} + \frac{1}{1-x^2}\frac{\partial^2 P_n(z)}{\partial \varphi^2} + n(n+1) P_n(z) = 0,$$

und diese Gleichung ist für $x = \cos\vartheta$, $z = \cos\gamma$ mit (3) identisch. Vermöge der Ableitung der Gleichung (6a) (oder (6)) ist deren Gültigkeit aber nicht auf Werte von x und x_1 beschränkt, die, absolut genommen, kleiner als 1 sind, sondern sie gilt für beliebige x und x_1.

Da durch Vertauschung von x mit x_1 und φ mit φ_1 z sich nicht ändert, so genügt $P_n(z)$ noch einer zweiten Gleichung, die aus (6) entsteht, wenn man statt x setzt x_1 und zugleich statt φ setzt φ_1.

Nun ist $P_n(z)$ eine ganze Funktion von z von der Ordnung n. Setzt man darin für z den Ausdruck (4) ein und entwickelt die einzelnen Potenzen von z nach dem binomischen Satze, so enthält der Ausdruck von $P_n(z)$ alle ganzen Potenzen von $\cos(\varphi-\varphi_1)$ bis zur n-ten einschließlich. Jede ganze Potenz von $\cos(\varphi-\varphi_1)$ läßt sich aber durch die Kosinus der Vielfachen von $\varphi-\varphi_1$ ausdrücken. Macht man das und faßt die Kosinus der gleichen Vielfachen von $\varphi-\varphi_1$ zusammen, so ergibt sich für $P_n(z)$ die Form

$$(7) \quad P_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu \cos\nu(\varphi-\varphi_1),$$

worin f_ν eine Funktion von x und x_1 ist. Um diese zu bestimmen, setzen wir den Ausdruck (7) in (6a) ein, so ergibt sich:

$$(8) \quad \sum_{\nu=0}^{n} \cos\nu(\varphi-\varphi_1)\left\{\frac{\partial (1-x^2)\frac{\partial f_\nu}{\partial x}}{\partial x} + \left(n(n+1) - \frac{\nu^2}{1-x^2}\right) f_\nu\right\} = 0.$$

Soll eine derartige, nach Kosinus der Vielfachen von $\varphi-\varphi_1$ fortschreitende Summe für beliebige Werte von $\varphi-\varphi_1$ verschwinden, so muß der Koeffizient jedes einzelnen Kosinus verschwinden. Denn multipliziert man (8) mit $\cos\nu'(\varphi-\varphi_1)$ und integriert nach φ zwischen den Grenzen 0 und 2π, so verschwinden nach dem schon S. 25 benutzten Hilfssatz alle Integrale, in denen ν von ν' verschieden ist. Mithin folgt aus (8), daß für jedes ν

$$\text{(8a)} \qquad \frac{\partial (1-x^2)\frac{\partial f_\nu}{\partial x}}{\partial x} + \left(n(n+1) - \frac{\nu^2}{1-x^2}\right) f_\nu = 0$$

sein muß. (8a) ist aber die Differentialgleichung der zugeordneten Kugelfunktionen, und da ν eine ganze Zahl $\leqq n$, so muß f_ν die Form haben

$$\text{(9)} \qquad f_\nu = c_\nu P_{n,\nu}(x) + c_\nu' Q_{n,\nu}(x).$$

Nun wird aber $Q_{n,\nu}(x)$ für $x=\pm 1$ unendlich, also würde auch f_ν und damit $P_n(z)$ für $x=\pm 1$ unendlich werden. Andererseits nimmt für $x=\pm 1$ z den Wert $\pm x_1$ an, und $P_n(\pm x_1)$ ist für alle endlichen x_1 endlich. Daher muß in (9) der Koeffizient c'_ν verschwinden, so daß (7) in

$$\text{(10)} \qquad P_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu P_{n,\nu}(x) \cos\nu(\varphi-\varphi_1)$$

übergeht. Darin ist c_ν eine Konstante in bezug auf x, muß aber noch von x_1 abhängen. Hätten wir andererseits den Ausdruck (7) in diejenige Differentialgleichung eingesetzt, die aus (6a) durch Vertauschung von x mit x_1 und φ mit φ_1 entsteht, so würde sich in ganz analoger Weise für $P_n(z)$ statt (10) die Gleichung

$$\text{(10a)} \qquad P_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu P_{n,\nu}(x_1) \cos\nu(\varphi-\varphi_1)$$

ergeben haben, in der d_ν in bezug auf x_1 konstant ist, wohl aber von x abhängt. Die beiden Gleichungen (10) und (10a) werden erfüllt, wenn man

$$\text{(11)} \qquad P_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} h_{n,\nu} P_{n,\nu}(x) P_{n,\nu}(x_1) \cos\nu(\varphi-\varphi_1)$$

setzt, wo die Koeffizienten $h_{n,\nu}$ weder von x, noch von x_1 abhängen, also wirkliche Konstante sind.

Zur Bestimmung der Koeffizienten $h_{n,\nu}$ dividieren wir (11) durch x^n, schreiben das Resultat

$$(11\text{a})\quad \left(\frac{z}{x}\right)^n \frac{P_n(z)}{z^n} = \sum_{\nu=0}^{n} h_{n,\nu} \frac{P_{n,\nu}(x)}{x^n} P_{n,\nu}(x_1) \cos\nu(\varphi-\varphi_1)$$

und gehen dann zur Grenze $x=\infty$ über. Für $x=\infty$ wird auch $z=\infty$. Nach Gleichung (7), S. 13 und (9), S. 56 ist aber

$$\lim_{z=\infty} \frac{P_n(z)}{z^n} = \frac{1\cdot 3\,..\,(2n-1)}{n!}, \quad \lim_{x=\infty} \frac{P_{n,\nu}(x)}{x^n} = 1;$$

ferner folgt aus (4), S. 66

$$\lim_{x=\infty} \frac{z}{x} = x_1 - \sqrt{x_1^2-1}\cos(\varphi-\varphi_1).$$

Für $x=\infty$ folgt daher aus (11a):

$$(12)\quad \left[x_1 - \sqrt{x_1^2-1}\cos(\varphi-\varphi_1)\right]^n \cdot \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{n!}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} h_{n,\nu} P_{n,\nu}(x_1)\cos\nu(\varphi-\varphi_1).$$

Andererseits folgt aus der Gleichung (3), S. 54, wenn wir darin statt φ setzen $\pi-(\varphi-\varphi_1)$ (und statt x setzen x_1):

$$(13)\quad \frac{\left[x_1 - \sqrt{x_1^2-1}\cos(\varphi-\varphi_1)\right]^n}{n!}$$
$$= 2\sum_{\nu=0}^{n}{}' \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{(n-\nu)!\,(n+\nu)!} P_{n,\nu}(x_1)(-1)^\nu \cos\nu(\varphi-\varphi_1);$$

dabei zeigt der Strich an dem Summenzeichen an, daß für $\nu=0$ nur die Hälfte des betreffenden Koeffizienten zu nehmen ist. Setzen wir die Ausdrücke (12) und (13) für $\left[x_1-\sqrt{x_1^2-1}\cos(\varphi-\varphi_1)\right]^n$ einander gleich, so müssen die

Koeffizienten der Kosinus gleicher Vielfacher beiderseits dieselben sein. Wir erhalten also

$$(14)\qquad h_{n,\nu} = (-1)^\nu\, 2\,\frac{[1\cdot 3\ldots(2n-1)]^2}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!},$$

und für $\nu = 0$ ist die Hälfte zu nehmen.

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst. Gleichung (11), in der z durch (4), $h_{n,\nu}$ durch (14) gegeben ist, heißt das Additionstheorem der Kugelfunktionen. Da die Ableitung für beliebige Werte von x und x_1 gilt, kann das Resultat auch auf $x = \cos\vartheta$, $x_1 = \cos\vartheta_1$ angewandt werden, wodurch z in $\cos\gamma$ übergeht. Somit ist, wenn $\cos\gamma$ den Ausdruck (1), S. 65, darstellt, $h_{n,\nu}$ durch (14) gegeben ist:

$$(15)\quad P_n(\cos\gamma) = \sum_{\nu=0}^{n} h_{n,\nu} P_{n,\nu}(\cos\vartheta) P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1)\cos\nu(\varphi - \varphi_1).$$

Bemerkt werden mag noch, daß nach S. 53, 54 die Funktion $P_{n,\nu}(\cos\vartheta)$ den Faktor $(\sqrt{\cos^2\vartheta - 1})^\nu = i^\nu \sin^\nu\vartheta$ enthält. In dem Produkt $P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\,P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1)$ verschwindet das Imaginäre von selbst.

Die Funktion $P_n(\cos\gamma)$ wird häufig als Laplacescher Koeffizient bezeichnet.

Folgerung. Integriert man $P_n(\cos\gamma)$ nach φ_1 zwischen den Grenzen 0 und 2π, so verschwinden auf der rechten Seite alle Integrale, in denen $\nu > 0$; der Wert des Integrals für $\nu = 0$ ist 2π. Ferner ist wegen des Wertes von $h_{n,0}$ [Gl. (14)] und wegen des Zusammenhangs von $P_{n,0}$ mit P_n [Gl. (2c), S. 54)]

$$h_{n,0}\,P_{n,0}(\cos\vartheta)\,P_{n,0}(\cos\vartheta_1) = P_n(\cos\vartheta)\,P_n(\cos\vartheta_1).$$

Somit folgt

$$(15\text{a})\qquad \int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\,d\varphi_1 = 2\pi\,P_n(\cos\vartheta)\,P_n(\cos\vartheta_1).$$

b) Die Kugelfunktionen mit zwei Veränderlichen oder die allgemeinen Kugelfunktionen.

Wir knüpfen an die partielle Differentialgleichung (3), S. 66 an und bezeichnen darin die abhängige Veränderliche mit y, also an die Gleichung

$$(16)\qquad \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta \frac{\partial y}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + n(n+1)y = 0,$$

in der n eine positive ganze Zahl ist. $y = P_n(\cos\gamma)$ ist eine partikuläre Lösung dieser Gleichung. Wir stellen uns nun die Aufgabe, die allgemeinste Lösung von (16) zu finden, die für alle Punkte einer mit dem Radius 1 um den Anfangspunkt beschriebenen Kugel endlich und eindeutig ist [ϑ und φ sind ja die räumlichen Polarkoordinaten eines Punktes dieser Kugel].

Wir suchen der Gleichung (16) durch eine Lösung von folgender Form zu genügen:

$$(17)\qquad y = \Theta\,.\,\Phi,$$

worin der Faktor Θ nur von ϑ, Φ nur von φ abhängt. Setzt man den Ausdruck (17) in (16) ein, dividiert dann durch $\Theta\,.\,\Phi$ und multipliziert mit $\sin^2\vartheta$, so ergibt sich

$$(17\,\text{a})\qquad \frac{\sin\vartheta}{\Theta}\frac{d \sin\vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta}}{d\vartheta} + n(n+1)\sin^2\vartheta = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}.$$

In (17a) muß jede der beiden Seiten derselben Konstante gleich sein. Denn differentiiert man (17a) nach φ, so wird die linke Seite $=0$, d. h. die rechte Seite ist in bezug auf φ eine Konstante; und da jene rechte Seite allein von φ abhängt, kann jene in bezug auf φ konstante Größe auch nicht ϑ enthalten, ist also konstant. Aus (17a) folgt also

$$(17\,\text{b})\qquad -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = c.$$

Die Differentialgleichung (17b) hat bekanntlich folgende Lösung:

1) falls $c > 0$, ist $\Phi = A\cos(\varphi\sqrt{c}) + B\sin(\varphi\sqrt{c})$,

2) falls $c < 0$, ist $\Phi = A e^{\varphi\sqrt{-c}} + B e^{-\varphi\sqrt{-c}}$,

3) falls $c = 0$, ist $\Phi = A + B\varphi$;

A und B bezeichnen jedesmal willkürliche Konstante. Nun soll aber y, und damit Φ in allen Punkten der um den

Anfangspunkt mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel eindeutig sein, Φ muß daher für irgendein φ und für $\varphi + 2\pi$ denselben Wert haben; denn zu diesen beiden Werten von φ gehört derselbe Punkt der Kugel; d. h. Φ muß eine um 2π periodische Funktion von φ sein. Daher ist die zweite Lösung zu verwerfen, die dritte hat die verlangte Eigenschaft nur für $B = 0$, die erste nur dann, wenn $\sqrt{c}$ eine ganze Zahl $= \nu$ ist. Somit muß

$$\Phi = A \cos(\nu\varphi) + B \sin(\nu\varphi) \tag{17c}$$

sein, wo ν eine positive ganze Zahl oder Null ist. [An sich könnte ν auch eine negative ganze Zahl sein; aber negative Werte von ν ergeben, da die Faktoren A, B willkürlich sind, nichts anderes als positive ν.]

Setzt man (17c) in (17a) ein, so wird

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = +\nu^2,$$

und (17a) geht in folgende Gleichung über:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}}{d\vartheta} + \left(n(n+1) - \frac{\nu^2}{\sin^2\vartheta}\right)\Theta = 0. \tag{17d}$$

Das ist die Differentialgleichung der zugeordneten Kugelfunktionen, allerdings die allgemeinere, in No. e) des Kap. 4 behandelte, in der ν auch $> n$ sein kann. Aus dem dort Gesagten wissen wir, daß (17d) für $\nu > n$ keine Lösung besitzt, die zugleich für $\cos\vartheta = +1$ und $\cos\vartheta = -1$, d. h. in beiden Polen unserer Kugel, endlich ist. Da wir nun eine Lösung von (16) suchen, die für alle Punkte unserer Kugel endlich ist, so können wir dem Parameter ν in (17d) nicht beliebige ganzzahlige Werte erteilen, sondern nur solche, die $\leqq n$ sind; und für diese ist die einzige Lösung, die auch in den Polen der Kugel endlich ist

$$\Theta = C \cdot P_{n,\nu}(\cos\vartheta). \tag{17e}$$

Da Θ mit Φ zu multiplizieren ist, und da das Produkt zweier willkürlicher Konstanten nur wieder eine willkürliche Konstante ergibt, kann $C = 1$ gesetzt werden. Wir sehen somit, daß jede Lösung unserer Differentialgleichung

(16), die die Form (17) hat und auf der Einheitskugel überall eindeutig und endlich ist, die Form haben muß:

$$(18)\qquad y = P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\{A\cos(\nu\varphi) + B\sin(\nu\varphi)\},$$

worin ν eine ganze Zahl $\leqq n$ ist. Solcher Lösungen gibt es $(n+1)$, da ν die Werte $0, 1, \ldots, n$ annehmen kann. Die Summe mehrerer oder aller dieser Lösungen, genügt ebenfalls der Gleichung (16), da diese linear ist. Als allgemeinste Lösung der Gleichung (16), die auf einer Kugel überall eindeutig und endlich ist, ergibt sich also folgende:

$$(19)\quad Y_n(\vartheta,\varphi) = \sum_{\nu=0}^{n} P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\left[A_\nu\cos(\nu\varphi) + B_\nu\sin(\nu\varphi)\right].$$

(Durch die Indizes an den Konstanten A, B ist angedeutet, daß diese von Glied zu Glied verschieden sein können.) Die so erhaltene Funktion $Y_n(\vartheta,\varphi)$, die $(2n+1)$ willkürliche Konstante enthält, da B_0 von selbst fortfällt, nennt man Kugelfunktion n-ter Ordnung mit zwei Veränderlichen oder allgemeine Kugelfunktion oder auch Laplacesche Kugelfunktion. Die in No. a) dieses Kapitels behandelte Funktion $P_n(\cos\gamma)$ ist ein spezieller Fall der allgemeinen Kugelfunktion. In $P_n(\cos\gamma)$ haben die im allgemeinen willkürlichen Konstanten A_ν, B_ν die speziellen Werte

$$(19\text{a})\qquad \left.\begin{matrix} A_\nu \\ B_\nu \end{matrix}\right\} = h_{n,\nu}\, P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1)\begin{cases}\cos\nu\varphi_1 \\ \sin\nu\varphi_1\end{cases}.$$

Übrigens ist $Y_n(\vartheta,\varphi)$ eine ganze homogene Funktion n-ter Ordnung von $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$ und $\sin\vartheta\sin\varphi$. Das ergibt sich zunächst für die einzelnen Summanden von (19). Denn nach Gleichung (4) S. 54 hat $P_{n,\nu}(\cos\vartheta)$ die Form

$$P_{n,\nu}(\cos\vartheta) = i^\nu \sin^\nu\vartheta\left[\cos^{n-\nu}\vartheta - (\,)\cos^{n-\nu-2}\vartheta + (\,)\cos^{n-\nu-4}\vartheta - \ldots\right]$$

(die konstanten Koeffizienten der zitierten Gleichung sind der Kürze halber nur durch ( ) angedeutet), und $\cos(\nu\varphi)$ läßt sich, wie bekannt, nach Potenzen von $\cos\varphi$ und von $\sin\varphi$ folgendermaßen entwickeln:

$$\cos\nu\varphi = \cos^\nu\varphi - \nu_2\cos^{\nu-2}\varphi\sin^2\varphi + \nu_4\cos^{\nu-4}\varphi\sin^4\varphi - \ldots\ldots$$

Daher ist $\sin^\nu \vartheta \cos \nu \varphi$ ein ganze homogene Funktion ν-ter Ordnung von $\sin \vartheta \cos \varphi$ und $\sin \vartheta \sin \varphi$ und $\cos^{n-\nu} \vartheta$ $\sin^\nu \vartheta \cos \nu \varphi$ ist eine ganze homogene Funktion n-ter Ordnung von $\cos \vartheta$, $\sin \vartheta \cos \varphi$ und $\sin \vartheta \sin \varphi$. Für $\cos^{n-\nu-2} \vartheta \sin^\nu \vartheta \cos \nu \varphi$ ergibt sich dasselbe, wenn man dies Glied mit dem Faktor

$$\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi,$$

der ja $= 1$ ist, multipliziert. Ebenso ist $\cos^{n-\nu-4} \sin^\nu \vartheta$ $\cos \nu \varphi$ mit dem Quadrat jenes Faktors zu multiplizieren usw. Nach der Multiplikation der einzelnen Summanden von $P_{n,\nu}(\cos \vartheta)$ mit den genannten Faktoren wird also, da die Summe von ganzen homogenen Funktionen derselben Ordnung wieder eine derartige Funktion ergibt, $P_{n,\nu}(\cos \vartheta)$ $\cos \nu \varphi$ eine ganze homogene Funktion n-ter Ordnung von $\cos \vartheta$, $\sin \vartheta \cos \varphi$ und $\sin \vartheta \sin \varphi$; ebenso $P_{n,\nu}(\cos \vartheta) \sin \nu \varphi$ und damit schließlich $Y_n(\vartheta, \varphi)$.

$Y_0(\vartheta, \varphi)$ ist eine ganze homogene Funktion nullter Ordnung, d. h. eine Konstante. Ferner ist, ausgeschrieben,

$$\begin{aligned} Y_1(\vartheta, \varphi) &= A_0 P_{1,0}(\cos \vartheta) + (A_1 \cos \varphi + B_1 \sin \varphi)\, P_{1,1}(\cos \vartheta) \\ &= A_0 \cos \vartheta + i \sin \vartheta\, (A_1 \cos \varphi + B_1 \sin \varphi) \end{aligned}$$

usw.

Der Faktor i^ν von $P_{n,\nu}(\cos \vartheta)$ ergibt im Resultat nichts Imaginäres. Man braucht für ungerade ν nur den willkürlichen Konstanten A_ν, B_ν rein imaginäre Werte beizulegen.

Folgerung. Die Summe zweier oder mehrerer Kugelfunktionen derselben Ordnung ergibt eine Kugelfunktion gleicher Ordnung.

Denn sind $Y_n(\vartheta, \varphi)$ und $X_n(\vartheta, \varphi)$ zwei Kugelfunktionen n-ter Ordnung, so sind beide durch Reihen von der Form (19) dargestellt; nur treten in X_n an Stelle der Konstanten A_ν, B_ν andere Konstante C_ν, D_ν auf. Addiert man X_n und Y_n, so sind nur die entsprechenden Konstanten zu addieren, die Summe hat wieder die Form der Reihe (19). Ebenso bei mehreren Summanden.

Da ferner eine Änderung der Konstanten A_ν, B_ν die Form der Reihe (19) nicht verändert, so erhält man, falls A_ν, B_ν einen von ϑ und φ unabhängigen Parameter ent-

halten, durch Differentiation oder Integration der Kugelfunktion Y_n nach diesem Parameter wieder eine Kugelfunktion n-ter Ordnung.

Bemerkung. Die Funktion Y_n nennt man auch „Kugelflächenfunktion", $r^n Y_n$, wo r den Radius vom Anfangspunkte bezeichnet, „räumliche Kugelfunktion". Ferner werden die Funktionen (18) von Thomson und Tait, sowie von Maxwell für den Fall $0 < \nu < n$ „tesserale harmonische Funktionen" genannt. Sie verschwinden nämlich auf gewissen Parallelkreisen und gewissen Meridianen einer Kugelfläche, und durch diese Kreise wird die ganze Kugelfläche in Kugelvierecke geteilt. Für den Fall $\nu = n$ gehen die Vierecke in Kugelzweiecke über, weshalb die Funktionen in diesem Falle „sektorielle harmonische Funktionen" heißen. Für $\nu = 0$ endlich werden die Funktionen nur auf gewissen Parallelkreisen $= 0$, an Stelle der Vierecke treten Kugelzonen, und die Funktionen werden dann „zonale harmonische Funktionen" genannt.

c) Integralsätze der allgemeinen Kugelfunktionen.

Satz I. Sind $Y_n(\vartheta, \varphi)$ und $X_m(\vartheta, \varphi)$ zwei allgemeine Kugelfunktionen verschiedener Ordnung, so ist

$$(20)\qquad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_n(\vartheta, \varphi)\, X_m(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta\, d\vartheta = 0 \qquad (m \gtrless n).$$

Beweis: $Y_n(\vartheta, \varphi)$ genügt der Gleichung (16), S. 72. Multipliziert man diese mit $X_m(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ und integriert über die Kugelfläche vom Radius 1, d. h. nach ϑ von 0 bis π, nach φ von 0 bis 2π, so ergibt sich, da die Reihenfolge der beiden Integrationen beliebig ist,

$$(21)\quad n(n+1) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_n X_m \sin\vartheta\, d\vartheta = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\partial \sin\vartheta \dfrac{\partial Y_n}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} \cdot X_m\, d\vartheta$$
$$- \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} X_m\, d\varphi\,.$$

(In (21) sind der Kürze halber die Argumente bei X_m und Y_n fortgelassen.) Das zweite Integral der rechten Seite ist trotz des Nenners $\sin\vartheta$ endlich. Denn bildet man aus (19) $\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2}$, so fällt das von φ unabhängige Glied (d. h. das aus $\nu=0$ entstehende) fort, und für $\nu>0$ hat $P_{n,\nu}(\cos\vartheta)$ den Faktor $\sin^\nu\vartheta$, so daß sich der Nenner $\sin\vartheta$ forthebt. Durch zweimalige teilweise Integration wird nun

$$(21\text{a})\qquad \int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2}X_m\,d\varphi=\int_0^{2\pi}Y_n\frac{\partial^2 X_m}{\partial\varphi^2}\,d\varphi,$$

da bei der teilweisen Integration die vom Integral freien Glieder verschwinden (Y_n und seine Ableitungen nach φ, desgleichen X_m und seine Ableitungen haben ja für $\varphi=0$ und $\varphi=2\pi$ denselben Wert). Ebenso erhält man durch zweimalige teilweise Integration, da $\sin\vartheta$ an den Grenzen verschwindet,

$$(21\text{b})\qquad \int_0^{\pi}\frac{\partial\sin\vartheta\frac{\partial Y_n}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta}X_m\,d\vartheta=\int_0^{\pi}Y_n\frac{\partial\sin\vartheta\frac{\partial X_m}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta}\,d\vartheta.$$

Vermöge (21a) und (21b) geht (21) in

$$(21\text{c})\qquad n(n+1)\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}Y_nX_m\sin\vartheta\,d\vartheta$$
$$=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}Y_n\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial\sin\vartheta\frac{\partial X_m}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 X_m}{\partial\varphi^2}\right]\sin\vartheta\,d\vartheta$$

über. Der in Klammern stehende Ausdruck in dem Integral der rechten Seite von (21c) ist aber $=-m(m+1)X_m$, da

X_m ebenfalls der Gleichung (16), S. 72 genügt, darin n durch m ersetzt; d. h. es ist

$$n(n+1)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_n X_m \sin\vartheta\, d\vartheta = m(m+1)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_n X_m \sin\vartheta\, d\vartheta\ .$$

oder

$$\text{(21 d)} \quad [n(n+1) - m(m+1)]\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_n X_m \sin\vartheta\, d\vartheta = 0\,.$$

Da $n(n+1) - m(m+1)$ von Null verschieden ist, muß der zweite Faktor der linken Seite von (21) verschwinden, q.e.d.

Im folgenden wird die allgemeine Gleichung (20) namentlich auf den Fall angewandt werden, wo an Stelle der allgemeinen Funktion Y_n die spezielle $P_n(\cos\gamma)$ [Gl. (15), S. 71] steht.

Satz II. Sind $Y_n(\vartheta,\varphi)$ und $X_n(\vartheta,\varphi)$ zwei allgemeine Kugelfunktionen derselben Ordnung, ist also Y_n durch (19) dargestellt,

$$\text{(22)} \quad X_n(\vartheta,\varphi) = \sum_{\nu=0}^{n} P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\,[C_\nu \cos(\nu\varphi) + D_\nu \sin(\nu\varphi)]\,,$$

so ist

$$\text{(23)} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_n(\vartheta,\varphi)\, X_n(\vartheta,\varphi) \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{4\pi}{2n+1}\left\{\frac{A_0 C_0}{h_{n,0}} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu C_\nu + B_\nu D_\nu}{h_{n,\nu}}\right\};$$

und darin bezeichnet $h_{n,\nu}$ dieselbe Konstante, die beim Additionstheorem der Kugelfunktionen auftrat [Gl. (14), S. 71).

Beweis: Multipliziert man die Reihen für Y_n und X_n, so erhält man eine Summe, deren allgemeines Glied

$$P_{n,\nu}(\cos\vartheta) P_{n,\nu'}(\cos\vartheta)\,[A_\nu C_{\nu'} \cos(\nu\varphi)\cos(\nu'\varphi) + B_\nu D_{\nu'} \sin(\nu\varphi)\sin(\nu'\varphi)$$
$$+ A_\nu D_{\nu'} \cos(\nu\varphi)\sin(\nu'\varphi) + B_\nu C_{\nu'} \cos(\nu'\varphi)\sin(\nu\varphi)]$$

ist, und zwar sind im allgemeinen ν und ν' verschieden. Integriert man nun nach φ zwischen den Grenzen 0 und 2π, so wird

$$\int_0^{2\pi} \cos(\nu\varphi)\cos(\nu'\varphi)\,d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin(\nu\varphi)\sin(\nu'\varphi)\,d\varphi = 0 \qquad \text{für } \nu \gtrless \nu',$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\nu\varphi)\sin(\nu'\varphi)\,d\varphi = 0 \qquad \text{sowohl für } \nu \gtrless \nu', \text{ als für } \nu = \nu'.$$

Dagegen ist

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\nu\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2(\nu\varphi)\,d\varphi = \pi \quad \text{für } \nu > 0,$$

während das linksstehende Integral für $\nu = 0$ den Wert 2π hat. Durch Ausführung der Integration nach φ verschwinden demnach alle Summanden, in denen ν und ν' verschieden sind, und es wird

$$(24) \quad \int_0^{2\pi} Y_n(\vartheta,\varphi)\,X_n(\vartheta,\varphi)\,d\varphi = 2\pi A_0 C_0 [P_{n,0}(\cos\vartheta)]^2$$
$$+ \pi \sum_{\nu=1}^{n} (A_\nu C_\nu + B_\nu D_\nu)\,[P_{n,\nu}(\cos\vartheta)]^2.$$

Multipliziert man mit $\sin\vartheta\,d\vartheta$ und integriert nach ϑ zwischen den Grenzen 0 und π, so wird

$$\int_0^{\pi} \Big[P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\Big]^2 \sin\vartheta\,d\vartheta = \int_{-1}^{+1} \Big[P_{n,\nu}(x)\Big]^2 dx = \frac{(-1)^\nu (n+\nu)!\,(n-\nu)!}{[1\cdot 3 \ldots (2n-1)]^2} \cdot \frac{2}{2n+1}$$

nach Gleichung (24), S. 61; und die rechte Seite ist, wenn wir die im Additionstheorem auftretende Konstante [Gl. (14), S. 71] einführen,

$$\frac{4}{2n+1} \cdot \frac{1}{h_{n,\nu}} \text{ für } \nu > 0; \quad \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{h_{n,0}} \text{ für } \nu = 0.$$

Die Einsetzung dieser Ausdrücke in die mit $\sin\vartheta$ multiplizierte und nach ϑ integrierte Gleichung (24) ergibt aber (23).

Satz III. Nimmt man statt der allgemeinen Funktion $Y_n(\vartheta,\varphi)$ die spezielle $P_n(\cos\gamma)$ [Gl. (15), S. 71], so sind

A_ν, B_ν durch (19a) S. 74 bestimmt; setzt man diese speziellen Werte in (23) ein, so wird die rechte Seite

$$\frac{4\pi}{2n+1}\left[C_0 P_{n,0}(\cos\vartheta_1)+\sum_{\nu=1}^{n}\Big(C_\nu\cos(\nu\varphi_1)+D_\nu\sin(\nu\varphi_1)\Big)P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1)\right].$$

Der zweite Faktor ist nach (22) der Wert, den die Funktion $X_n(\vartheta,\varphi)$ annimmt, wenn man darin ϑ,φ mit ϑ_1,φ_1 vertauscht. Wir haben damit den wichtigen Satz:

$$(25)\quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} X_n(\vartheta,\varphi)P_n(\cos\gamma)\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{4\pi}{2n+1}X_n(\vartheta_1,\varphi_1).$$

Die Gleichung (25) kann, da $\cos\gamma$ durch Vertauschung von ϑ,φ mit ϑ_1,φ_1 sich nicht ändert, auch so geschrieben werden:

$$(25\text{a})\quad \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} X_n(\vartheta_1,\varphi_1)P_n(\cos\gamma)\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1 = \frac{4\pi}{2n+1}X_n(\vartheta,\varphi).$$

Folgerung 1. Ist

$$(26)\quad \cos\gamma_2 = \cos\vartheta_2\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta_2\sin\vartheta_1\cos(\varphi_2-\varphi_1),$$

und nimmt man für $X_n(\vartheta_1,\varphi_1)$ den speziellen Wert $P_n(\cos\gamma_2)$, so geht (25a) in folgende Gleichung über:

$$(27)\quad \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} P_n(\cos\gamma)P_n(\cos\gamma_2)\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1 = \frac{4\pi}{2n+1}P_n(\cos\delta),$$

wo

$$(27\text{a})\quad \cos\delta = \cos\vartheta\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta\sin\vartheta_2\cos(\varphi_2-\varphi)$$

ist.

Folgerung 2. Ist in (26) $\vartheta_2=\vartheta$ und $\varphi_2=\varphi$, also $\gamma_2=\gamma$, so wird in (27a) $\cos\delta=1$, und da $P_n(1)=1$ ist, so folgt

$$(28)\quad \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi}\Big[P_n(\cos\gamma)\Big]^2\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1 = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

Kapitel 6.

Entwicklung nach Kugelfunktionen.

a) Form der Entwicklung. Gültigkeit derselben für ganze Funktionen von $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$.

Wir stellen uns die Aufgabe, eine auf der Kugelfläche beliebig gegebene Funktion $f(\vartheta,\varphi)$ in eine nach den $Y_n(\vartheta,\varphi)$ fortschreitende Reihe zu entwickeln. Falls eine solche Entwicklung möglich ist:

$$(1) \qquad f(\vartheta,\varphi)=\sum_m X_m(\vartheta,\varphi)$$

[welche Reihe im allgemeinen unendlich sein wird], können die einzelnen X_m mittels der Integralsätze der allgemeinen Kugelfunktionen bestimmt werden. Zu dem Zwecke multiplizieren wir (1) mit $P_n(\cos\gamma)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$, wo $\cos\gamma$ der bekannte, in dem Additionstheorem auftretende Ausdruck ist [Gl. (1) S. 65], und integrieren über die Kugelfläche. Nach Satz I von Nr. c) des vorigen Kapitels verschwinden dann rechts alle Integrale, in denen der Index m der Kugelfunktion X von n verschieden ist, während sich der Integralwert für $m=n$ aus dem Satze III desselben Kapitels ergibt. So erhält man

$$(2) \qquad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\vartheta,\varphi)\, P_n(\cos\gamma)\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{4\pi}{2n+1}\, X_n(\vartheta_1,\varphi_1)$$

oder, wenn man ϑ,φ mit ϑ_1,φ_1 vertauscht, wodurch sich, wie schon früher bemerkt, γ nicht ändert,

$$(2a) \qquad X_n(\vartheta,\varphi)=\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1 \int_0^{2\pi} f(\vartheta_1,\varphi_1)P_n(\cos\gamma)\, d\varphi_1,$$

so daß die Reihe (1) ausgeschrieben lautet:

$$(3) \qquad f(\vartheta,\varphi)=\frac{1}{4\pi}\sum_n (2n+1)\int_0^{\pi}\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1 \int_0^{2\pi} f(\vartheta_1,\varphi_1)P_n(\cos\gamma)\, d\varphi_1.$$

Daß der Ausdruck auf der rechten Seite von (2a) eine allgemeine Kugelfunktion n-ter Ordnung ist, folgt aus dem früher Gesagten. $P_n(\cos\gamma)$, als Funktion von ϑ und φ betrachtet, ist eine Kugelfunktion, ihre Koeffizienten sind in (19a), S. 74 angegeben. Diese Koeffizienten sind mit $\frac{2n+1}{4\pi} f(\vartheta_1, \varphi_1) \sin\vartheta_1$ zu multiplizieren, und dann ist nach den Parametern ϑ_1, φ_1 zu integrieren. Dadurch ändert sich nur der Wert der Koeffizienten, nicht die Form der Entwicklung; das Resultat ist also eine allgemeine Kugelfunktion derselben Ordnung wie $P_n(\cos\gamma)$.

Ferner ist, wenn eine Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ in eine Reihe der Form (1) entwickelt werden kann, die Entwicklung nur auf eine Art möglich. Denn soll $f(\vartheta, \varphi)$ sowohl durch die Reihe (1), als durch eine andere Reihe

$$(1a) \qquad f(\vartheta, \varphi) = \sum_{m_1} Y_{m_1}(\vartheta, \varphi)$$

dargestellt werden, so muß für alle Werte von ϑ, φ

$$(4) \qquad \sum_m X_m(\vartheta, \varphi) = \sum_{m_1} Y_{m_1}(\vartheta, \varphi)$$

sein. Multipliziert man (4) mit $P_n(\cos\gamma)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ und integriert über die Kugel, so wird

$$\frac{4\pi}{2n+1} X_n(\vartheta_1, \varphi_1) = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\vartheta_1, \varphi_1),$$

d. h. in den Reihen (1) und (1a) sind die einzelnen Kugelfunktionen derselben Ordnung identisch.

Im vorstehenden ist vorausgesetzt, daß eine Entwicklung von der Form (1) möglich, außerdem, daß, falls die Reihe unendlich, gliedweise Integration zulässig ist. Unter welchen Bedingungen aber die Entwicklung möglich, darüber gibt das auseinandergesetzte Verfahren keinen Aufschluß.

In einem speziellen Falle läßt sich die Gültigkeit der Entwicklung leicht zeigen, in dem nämlich, in welchem $f(\vartheta, \varphi)$ eine ganze rationale Funktion der Koordinaten der Punkte der Einheitskugel ist, d. h. eine ganze Funktion von $\cos\vartheta, \sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi$; und in diesem Falle ist die Reihe (1) endlich. Das ergibt sich aus folgender Über-

legung. Eine ganze Funktion m-ter Ordnung von $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$ ist eine Summe von Gliedern der Form

$$\cos^{n-\nu}\vartheta\sin^{\nu}\vartheta\cos^{\nu-\alpha}\varphi\sin^{\alpha}\varphi, \tag{5}$$

jeder Summand mit einer Konstanten multipliziert. Dabei sind n, ν, α ganze Zahlen, $n \leqq m$, $\nu \leqq n$, $\alpha \leqq \nu$. Ist α eine gerade Zahl, so läßt sich die Potenz

$$\cos^{\nu-\alpha}\varphi\sin^{\alpha}\varphi = \cos^{\nu-\alpha}\varphi\,(1-\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}\alpha}$$

nach Potenzen von $\cos\varphi$ entwickeln, und jede Potenz von $\cos\varphi$ läßt sich durch eine nach den Kosinus der Vielfachen von φ fortschreitende Summe darstellen, und zwar treten, da nur die ν-te, $(\nu-2)$-te, $(\nu-4)$-te usw. Potenz $\cos\varphi$ vorkommen, auch nur $\cos(\nu\varphi)$, $\cos(\nu-2)\varphi$, $\cos(\nu-4)\varphi$ usw. auf. Der Ausdruck (5) nimmt dann die Form an

$$\cos^{n-\nu}\vartheta\sin^{\nu}\vartheta\sum A_k\cos(\nu-2k)\varphi, \tag{5a}$$

worin k alle Werte von 0 bis $\frac{1}{2}\nu$ für gerade ν, von 0 bis $\frac{1}{2}(\nu-1)$ für ungerade ν annimmt. Das allgemeine Glied von (5a) läßt sich, mit Fortlassung des konstanten Faktors, so schreiben:

$$\cos^{n-\nu}\vartheta\,(1-\cos^2\vartheta)^k\sin^{\nu-2k}\vartheta\cos(\nu-2k)\varphi$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\nu-2k=\mu$$

gesetzt wird,

$$\sin^{\mu}\vartheta\cos(\mu\varphi)\cos^{n-\mu-2k}\vartheta\,(1-\cos^2\vartheta)^k,$$

worin $\mu+2k\leqq n$ ist, d. i., wenn $(1-\cos^2\vartheta)^k$ aufgelöst wird, ein Ausdruck der Form

$$\begin{aligned}\sin^{\mu}\vartheta\cos(\mu\varphi)\{&(-1)^k\cos^{n-\mu}\vartheta+B_1\cos^{n-\mu-2}\vartheta\\&+B_2\cos^{n-\mu-4}\vartheta+\ldots+\cos^{n-\mu-2k}\vartheta\}.\end{aligned} \tag{5b}$$

Weiter ist, falls $n-\mu$ eine gerade Zahl,

$$\left\{\begin{array}{l}P_{n,\mu}(\cos\vartheta)=i^{\mu}\sin^{\mu}\vartheta\,\{\cos^{n-\mu}\vartheta-()\cos^{n-\mu-2}\vartheta+\ldots\pm()\cos^0\vartheta\},\\ P_{n-2,\mu}(\cos\vartheta)=i^{\mu}\sin^{\mu}\vartheta\{\cos^{n-\mu-2}\vartheta-()\cos^{n-\mu-4}\vartheta+\ldots\pm()\cos^0\vartheta\},\\ \text{— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —}\\ P_{\mu,\mu}(\cos\vartheta)=i^{\mu}\sin^{\mu}\vartheta\,.\cos^0\vartheta\,.\end{array}\right. \tag{6}$$

In den Gleichungen (6), deren konstante Koeffizienten nur angedeutet sind, betrachte man die einzelnen Potenzen von $\cos\vartheta$, einschließlich $\cos^0\vartheta$ als Unbekannte und löse die Gleichungen, deren Zahl gleich der der Unbekannten ist, nach diesen auf, so erhält man für alle in (5b) auftretenden, mit $\sin^\mu\vartheta$ multiplizierten Potenzen von $\cos\vartheta$ Reihen der Form

$$(7)\; i^{-\mu}\{CP_{n,\mu}(\cos\vartheta)+C'P_{n-2,\mu}(\cos\vartheta)+C''P_{n-4,\mu}(\cos\vartheta)+\ldots\},$$

und die Summe mehrerer Reihen von dieser Form gibt eine Reihe derselben Form, so daß der Ausdruck (5b) die Form annimmt

$$(7\text{a})\quad \cos(\mu\varphi)\sum D_k P_{n-2k,\mu}(\cos\vartheta) \qquad (n-2k \geqq \mu);$$

das ist aber eine endliche Summe von Kugelfunktionen verschiedener Ordnung, denn $D_k P_{n-2k,\mu}(\cos\vartheta)\cos(\mu\varphi)$ ist ein spezieller Fall von $Y_{n-2k}(\vartheta,\varphi)$.

In (6) war angenommen, daß $n-\mu$ eine gerade Zahl sei. Ist $n-\mu$ ungerade, so hat in jeder Reihe der letzte Summand den Faktor $\cos\vartheta$, und die letzte Gleichung (6) wird dann

$$P_{\mu+1,\mu}(\cos\vartheta)=i^\mu\sin^\mu\vartheta\cos\vartheta.$$

Die aus den Gleichungen (6) gezogenen Schlüsse bleiben dieselben.

Der Ausdruck (5b) war nun einer der Summanden von (5a); in gleicher Weise lassen sich alle Summanden von (5a) umformen, und da die Summe mehrerer Kugelfunktionen gleicher Ordnung wieder eine Kugelfunktion derselben Ordnung ergibt, ist auch der Ausdruck (5a) und damit (5) eine Summe von Kugelfunktionen verschiedener Ordnung.

Für den Fall, daß in (5) α ungerade ist, läßt sich (5) ebenfalls in eine Reihe der Form (5a) entwickeln, die nur $\sin(\nu-2k)\varphi$ an Stelle von $\cos(\nu-2k)\varphi$ enthält. In (7a) steht also nun $\sin(\mu\varphi)$ an Stelle von $\cos(\mu\varphi)$, und wir haben nur andere spezielle Fälle der Kugelfunktionen.

Da die Potenz (5) sich durch eine endliche Summe von allgemeinen Kugelfunktionen darstellen läßt, so gilt das gleiche für eine endliche Summe solcher Potenzen,

jede mit einer Konstanten multipliziert, d. h. für jede rationale ganze Funktion $f(\vartheta, \varphi)$.

Spezielle Anwendungen:

1. Jede Funktion erster Ordnung von $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$

$$m_0 + m_1 \cos\vartheta + m_2 \sin\vartheta\cos\varphi + m_3 \sin\vartheta\sin\varphi$$

hat, wie unmittelbar aus dem S. 75 angegebenen Ausdrucke für Y_0 und Y_1 hervorgeht, die Form

$$Y_0(\vartheta, \varphi) + Y_1(\vartheta, \varphi) \, .$$

2. Um die Funktion

$$\psi = m_0 + m_1 \cos^2\vartheta + m_2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + m_3 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi \, ,$$

in der m_0, m_1, m_2, m_3 konstant sind, nach Kugelfunktionen zu entwickeln, drücke man $\cos^2\varphi$ und $\sin^2\varphi$ durch $\cos(2\varphi)$ aus, so wird

$$\psi = m_0 + \frac{m_2 + m_3}{2} + \left(m_1 - \frac{m_2 + m_3}{2}\right)\cos^2\vartheta + \frac{m_2 - m_3}{2}\sin^2\vartheta\cos(2\varphi).$$

Ferner ist

$$\cos^2\vartheta = \frac{2}{3} P_2(\cos\vartheta) + \frac{1}{3} = P_{2,0}(\cos\vartheta) + \frac{1}{3} \, ,$$

$$i^2 \sin^2\vartheta = P_{2,2}(\cos\vartheta) \, .$$

Mithin wird

$$\psi = Y_0 + Y_2(\vartheta, \varphi) \, ,$$

worin

$$Y_0 = m_0 + \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3} \, , \quad Y_2(\vartheta, \varphi) = \left(m_1 - \frac{m_2 + m_3}{2}\right) P_{2,0}(\cos\vartheta)$$
$$- \frac{m_2 - m_3}{2} P_{2,2}(\cos\vartheta)\cos(2\varphi)$$

ist.

b) Allgemeine Bedingungen für die Gültigkeit der Entwicklung nach Kugelfunktionen.

In eine endliche Reihe von Kugelfunktionen lassen sich nur ganze Funktionen von $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$ entwickeln, da ja Y_n eine homogene ganze Funktion n-ter Ordnung der genannten Größen ist, damit jede endliche

Summe von Funktionen Y eine ganze rationale Funktion. Um zu untersuchen, unter welchen Bedingungen für andere Funktionen eine Entwicklung in eine unendliche Reihe der Form (3) möglich ist, betrachten wir zuerst eine endliche Reihe jener Form und nennen S_r die Summe der $(r+1)$ ersten Glieder

$$S_r = \sum_{n=0}^{n=r} X_n(\vartheta, \varphi), \tag{8}$$

worin die einzelnen X_n durch (2a) bestimmt sind. Gelingt es, für S_r einen Ausdruck zu finden, aus dem man erkennen kann, welcher Grenze S_r zustrebt, wenn r über alle Grenzen wächst, und wird dann $\lim S_r = f(\vartheta, \varphi)$, so ist unsere Entwicklung gültig und stellt die Funktion f dar.

Ein einfacher Ausdruck für S_r läßt sich zunächst in einem speziellen Falle ermitteln, nämlich für den Pol der Kugel, d. i. für $\vartheta = 0$. Für $\vartheta = 0$ wird $\cos\gamma = \cos\vartheta_1$, $P_n(\cos\vartheta_1)$ ist aber von φ_1 unabhängig. Wird daher in (2a) zuerst nach φ_1 integriert, so kann $P_n(\cos\gamma)$ in unserem speziellen Falle vor das innere Integral gestellt werden. Wird noch

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta_1, \varphi_1)\, d\varphi_1 = F(\vartheta_1) \tag{9}$$

gesetzt, so wird

$$X_n(0, \varphi) = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} F(\vartheta_1)\, P_n(\cos\vartheta_1)\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1 \tag{10}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} F(\vartheta_1)\left[\frac{dP_{n-1}(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1} - \frac{dP_{n+1}(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}\right] d\vartheta_1$$

nach Gleichung (30a), S. 33. Speziell wird

$$X_0(0, \varphi) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} F(\vartheta_1)\left[-\frac{dP_1(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}\right] d\vartheta_1 .$$

Für $\vartheta = 0$ geht also (8) in folgende Gleichung über:

$$(11)\quad 2\,S_r = \int_0^\pi F(\vartheta_1)\left\{-\frac{d\,P_1(\cos\vartheta_1)}{d\,\vartheta_1} + \sum_{n=1}^{r}\left(\frac{d\,P_{n-1}(\cos\vartheta_1)}{d\,\vartheta_1} - \frac{d\,P_{n+1}(\cos\vartheta_1)}{d\,\vartheta_1}\right)\right\} d\,\vartheta_1\,,$$

d. i.

$$(11\text{a})\quad 2\,S_r = \int_0^\pi F(\vartheta_1)\left\{\frac{d\,P_0(\cos\vartheta_1)}{d\,\vartheta_1} + \frac{d\,P_1(\cos\vartheta_1)}{d\,\vartheta_1} + \frac{d\,P_2(\cos\vartheta_1)}{d\,\vartheta_1} + \dots + \frac{d\,P_{r-1}(\cos\vartheta_1)}{d\,\vartheta_1} - \frac{d\,P_1(\cos\vartheta_1)}{d\,\vartheta_1} - \frac{d\,P_2(\cos\vartheta_1)}{d\,\vartheta_1} - \dots - \frac{d\,P_{r+1}(\cos\vartheta_1)}{d\,\vartheta_1}\right\} d\,\vartheta_1$$

oder schließlich, da $P_0(\cos\vartheta_1) = 1$ ist und die Differentialquotienten von $P_1, P_2, \dots, P_{r-1}$ sich fortheben,

$$(11\text{b})\quad -2\,S_r = \int_0^\pi F(\vartheta_1)\frac{d\,P_r(\cos\vartheta_1)}{d\,\vartheta_1}d\,\vartheta_1 + \int_0^\pi F(\vartheta_1)\frac{d\,P_{r+1}(\cos\vartheta_1)}{d\,\vartheta_1}d\,\vartheta_1 = J_r + J_{r+1}\,.$$

Es ist nun zu ermitteln, was aus den beiden Summanden der rechten Seite von (11b) wird, wenn r über alle Grenzen wächst. Zu dem Zwecke zerlegen wir das Integral J_r in Teilintegrale

$$(12)\quad J_r = \int_0^\eta F(\vartheta_1)\frac{d\,P_r(\cos\vartheta_1)}{d\,\vartheta_1}d\,\vartheta_1 + \int_\eta^\zeta F(\vartheta_1)\frac{d\,P_r(\cos\vartheta_1)}{d\,\vartheta_1}d\,\vartheta_1 + \int_\zeta^\pi F(\vartheta_1)\frac{d\,P_r(\cos\vartheta_1)}{d\,\vartheta_1}d\,\vartheta_1\,.$$

Darin soll η eine Größe bezeichnen, die sich mit wachsendem r der Null beliebig nähert, derart aber, daß

$$(13)\quad \lim_{r=\infty} P_r(\cos\eta) = 0$$

ist. Daß das möglich ist, ist in Kap. 2, Nr. e), Zusatz 1 (S. 21) gezeigt. Man braucht nur $\eta = u : r^\beta$ zu nehmen, wo u eine von r unabhängige endliche Größe und $\beta < \frac{1}{2}$ ist. Ferner soll ζ eine Größe bezeichnen, die sich mit wachsendem r dem Werte π in derselben Weise nähert wie η der Null, d. h.

$$\zeta = \pi - \eta_1, \quad \lim_{r=\infty} P_r(\cos\eta_1) = 0. \tag{13a}$$

Von den drei Summanden der rechten Seite von (12) untersuchen wir zuerst den zweiten und zerlegen ihn in Teilintegrale, deren Grenzen die zwischen η und ζ liegenden Wurzeln der Gleichung $P_r(\cos\vartheta_1) = 0$ sind. Die Gleichung $P_r(x) = 0$ hat ja lauter reelle, zwischen -1 und $+1$ liegende Wurzeln, d. h. $P_r(\cos\vartheta_1)$ wird $= 0$ für r verschiedene reelle, zwischen 0 und π liegende Werte von ϑ_1. Von diesen mögen, der Größe nach geordnet, die Wurzeln $\vartheta_1 = \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_p\ (p \leqq r)$ zwischen η und ζ liegen. Dann lautet unsre Zerlegung

$$\int_\eta^\zeta = \int_\eta^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \cdot + \int_{\alpha_p}^{\zeta}. \tag{14}$$

Weiter wissen wir, daß zwischen irgend zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln der Gleichung $P_r(x) = 0$ stets eine und nur eine Wurzel von $\frac{dP_r(x)}{dx} = 0$ liegt; d. h. zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Werten α_m und α_{m+1} liegt stets ein und nur ein Wert von ϑ_1, für den $\frac{dP_r(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}$ verschwindet. Ist dieser Wert von $\vartheta_1 = \beta_m$ und zerlegen wir das betrachtete Teilintegral nochmals in die Summe zweier

$$\int_{\alpha_m}^{\alpha_{m+1}} F(\vartheta_1)\frac{dP_r(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}d\vartheta_1 = \int_{\alpha_m}^{\beta_m} F(\vartheta_1)\frac{dP_r(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}d\vartheta_1$$

$$+ \int_{\beta_m}^{\alpha_{m+1}} F(\vartheta_1)\frac{dP_r(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}d\vartheta_1,$$

so ändert in den rechtsstehenden Integralen $\frac{d P_r(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}$ innerhalb der Grenzen sein Zeichen nicht, und es kann daher der Mittelwertsatz angewandt werden, woraus

$$\int_{\alpha_m}^{\alpha_{m+1}} F(\vartheta_1)\frac{d P_r(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}\,d\vartheta_1 = F(\delta_m)\int_{\alpha_m}^{\beta_m}\frac{d P_r(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}\,d\vartheta_1$$

$$+ F(\delta'_m)\int_{\beta_m}^{\alpha_{m+1}}\frac{d P_r(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}\,d\vartheta_1$$

$$= [F(\delta_m) - F(\delta'_m)]\,P_r(\cos\beta_m)$$

folgt. Darin ist δ_m ein Wert zwischen α_m und β_m, δ'_m ein solcher zwischen β_m und α_{m+1}. Nach Kap. 2, Nr. e) ist $\lim\limits_{r=\infty} P_r(\cos\vartheta_1) = 0$, falls ϑ_1 von Null und π verschieden ist, ja noch, wenn ϑ_1 gleich dem obigen η wird, erst recht, wenn $\vartheta_1 > \eta$. Daher ist

$$\lim_{r=\infty} P_r(\cos\beta_m) = 0$$

und somit auch

$$\lim_{r=\infty}\int_{\alpha_m}^{\alpha_{m+1}} F(\vartheta_1)\frac{d P_r(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}\,d\vartheta_1 = 0, \tag{15}$$

vorausgesetzt, daß $F(\delta_m)$ und $F(\delta'_m)$ endlich sind. Das gilt für jeden Summanden der rechten Seite von (14), auch für den ersten und letzten, und daher wird

$$\lim_{r=\infty}\int_{\eta}^{\zeta} F(\vartheta_1)\frac{d P_r(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}\,d\vartheta_1 = 0, \tag{15a}$$

vorausgesetzt, daß $F(\vartheta_1)$ zwischen den Grenzen η und ζ stets endlich ist.

Um den Grenzwert des ersten Summanden von (12) zu ermitteln, wenden wir den sogenannten dritten Mittelwertsatz an, nach dem

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx$$

ist, falls ξ eine zwischen a und b (die Grenzen eingeschlossen) liegende Größe ist und $f(x)$ innerhalb der Grenzen weder vom Zunehmen zum Abnehmen, noch vom Abnehmen zum Zunehmen übergeht. Danach ist, falls $F(\vartheta_1)$ zwischen den Grenzen 0 und η kein Maximum oder Minimum hat,

$$\int_0^\eta F(\vartheta_1)\frac{d P_r(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}\,d\vartheta_1 = F(0)\int_0^\xi \frac{dP_r(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}\,d\vartheta_1$$

$$+ F(\eta)\int_\xi^\eta \frac{dP_r(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}\,d\vartheta_1$$

$$= -F(0)P_r(1) + [F(0)-F(\eta)]\,P_r(\cos\xi) + F(\eta)P_r(\cos\eta)\,.$$

Geht man zur Grenze $r=\infty$ über, so wird nach (13) $\lim P_r(\cos\eta)=0$, η selbst verschwindet, weshalb $\lim[F(0) - F(\eta)]=0$ wird; und da $P_r(1)=1$ ist für jedes r, so wird

$$\lim_{r=\infty}\int_0^\eta F(\vartheta_1)\frac{d P_r(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}\,d\vartheta_1 = -F(0)\,. \tag{16}$$

Der Grenzwert des dritten Summanden von (12) ergibt sich, wenn man $\vartheta_2=\pi-\vartheta_1$ als Integrationsvariable einführt, dann wird mit Rücksicht auf (13a), und da $P_r(-x)=(-1)^r P_r(x)$ ist,

$$\int_\zeta^\pi F(\vartheta_1)\frac{d P_r(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}\,d\vartheta_1 = (-1)^{r+1}\int_0^{\eta_1} F(\pi-\vartheta_2)\frac{dP_r(\cos\vartheta_2)}{d\vartheta_2}\,d\vartheta_2\,,$$

daher nach (16)

(16a) $$\lim_{r=\infty}\int_{\xi}^{\pi} F(\vartheta_1)\frac{d P_r(\cos\vartheta_1)}{d\vartheta_1}\,d\vartheta_1 = (-1)^r F(\pi-0).$$

Aus (15a), (16) und (16a) folgt

(17) $$\lim_{r=\infty} J_r = -F(0) + (-1)^r F(\pi-0).$$

Der Grenzwert des zweiten Summanden J_{r+1} der rechten Seite von (11b) ergibt sich aus (17) durch Vertauschung von r mit $r+1$, d. h.

(17a) $$\lim_{r=\infty} J_{r+1} = -F(0) + (-1)^{r+1} F(\pi-0),$$

und somit

$$\lim_{r=\infty}(-2S_r) = \lim_{r=\infty}(J_r + J_{r+1}) = -2F(0)$$

oder

(18) $$\lim S_r = F(0).$$

Resultat. Die Reihe (8) nähert sich unter der Voraussetzung, daß die durch (9) definierte Funktion $F(\vartheta_1)$ zwischen $\vartheta_1 = 0$ und $\vartheta_1 = \pi$, die Grenzen eingeschlossen, überall endlich ist und in unmittelbarer Nahe von $\vartheta_1 = 0$ und $\vartheta_1 = \pi$ kein Maximum oder Minimum besitzt, in dem speziellen Fall $\vartheta = 0$ mit unbegrenzt wachsendem r immer mehr dem Werte $F(0)$.

Welche Bedeutung hat nun $F(0)$? $\vartheta_1 = \text{Const.}$ stellt einen Parallelkreis der Einheitskugel dar, und die Funktion $F(\vartheta_1)$ in (9) ist das arithmetische Mittel der Werte, die $f(\vartheta_1, \varphi_1)$ auf diesem Parallelkreis annimmt. Denkt man nämlich den Parallelkreis ϑ_1 in n gleiche Teile geteilt, so ist das arithmetische Mittel der Werte, welche $f(\vartheta_1, \varphi_1)$ in den n Teilpunkten annimmt,

(19) $$\frac{1}{n}\left[f(\vartheta_1, 0) + f\left(\vartheta_1, \frac{2\pi}{n}\right) + f\left(\vartheta_1, \frac{4\pi}{n}\right) + \ldots + f\left(\vartheta_1, \frac{(n-1)2\pi}{n}\right)\right].$$

Multipliziert man den Ausdruck (19) mit 2π und läßt dann n über alle Grenzen wachsen, so ist der Grenzwert des

mit 2π multiplizierten Ausdrucks (19) nach der Definition des bestimmten Integrals

$$=\int_0^{2\pi} f(\vartheta_1, \varphi_1)\, d\varphi_1 .$$

Zugleich ist der Grenzwert das mit 2π multiplizierte arithmetische Mittel aller Werte, die $f(\vartheta_1, \varphi_1)$ auf dem betrachteten Parallelkreise annimmt.

Aus der Bedeutung von $F(\vartheta_1)$ folgt die von $F(0)$. Für $\vartheta_1 = 0$ reduziert sich der Parallelkreis ϑ_1 auf den Pol. $F(0)$ ist somit das arithmetische Mittel aller Werte, welche $f(\vartheta_1, \varphi_1)$ im Pol $\vartheta_1 = 0$ annimmt. Hat $f(\vartheta_1, \varphi_1)$ im Pol $\vartheta_1 = 0$ nur einen Wert, so ist dieser selbst das arithmetische Mittel.

Sonach ist für $\vartheta = 0$, d. h. wenn der Punkt ϑ, φ der Kugel in den Pol fällt, $\lim\limits_{r=\infty} S_r$ gleich dem Werte, den $f(\vartheta, \varphi)$ im Pol annimmt, falls $f(\vartheta, \varphi)$ dort nur einen bestimmten Wert hat. Ist aber $f(\vartheta, \varphi)$ im Pol mehrdeutig, d. h. hängt der Wert, den f dort annimmt, davon ab, auf welchem Meridian man sich dem Pole nähert, so ist $\lim\limits_{r=\infty} S_r$ gleich dem arithmetischen Mittel der verschiedenen Werte, die f im Pol annimmt.

Aus dem Wert, den $\lim S_r$ für $r = \infty$ in dem oben behandelten speziellen Falle hat, ergibt sich $\lim S_r$ für beliebige ϑ, φ durch Übergang von einem System von Polarkoordinaten zu einem andern. Auf der Einheitskugel sei z der Pol des Koordinatensystems ϑ_1, φ_1, B ein beliebiger Punkt mit den Koordinaten ϑ_1, φ_1, A der Punkt, dessen Koordinaten ϑ, φ sind (vgl. Fig. 3, S. 8). Dann ist $zA = \vartheta$, $zB = \vartheta_1$, Winkel $AzB = \varphi - \varphi_1$ (oder $\varphi_1 - \varphi$) und $AB = \gamma$. Bei der Integration nach ϑ_1, φ_1 bleiben ϑ, φ, also Punkt A ungeändert. Führt man nun ein neues Polarkoordinatensystem ein, dessen Pol A ist, so wird in diesem ein Punkt B der Kugel bestimmt durch seinen Abstand γ von A und durch den Winkel, den BA mit einem festen von A ausgehenden Hauptkreise bildet; als letzteren nehme man Az und bezeichne $\sphericalangle BAz$ mit λ. Man erhält alle Punkte B

der Kugel, wenn man γ von 0 bis π, λ von 0 bis 2π variieren läßt. Ferner wird das Flächenelement der Kugel, das im alten System $\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1$ war, im neuen $= \sin\gamma\, d\gamma\, d\lambda$. Bei Einführung von γ, λ statt ϑ_1, φ_1 ist daher $\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1$ durch $\sin\gamma\, d\gamma\, d\lambda$ zu ersetzen. Zugleich gehe $f(\vartheta_1, \varphi_1)$ in $\psi(\gamma, \lambda)$ über, so nimmt der Ausdruck (2a) für $X_n(\vartheta, \varphi)$ in den neuen Variabeln die Form an:

$$(20) \qquad X_n(\vartheta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin\gamma\, d\gamma \int_0^{2\pi} \psi(\gamma, \lambda)\, P_n(\cos\gamma)\, d\lambda .$$

Da $P_n(\cos\gamma)$ von λ unabhängig ist, hat die rechte Seite von (20) genau die Form, die vorher $X_n(0, \varphi)$ hatte. Man kann daher das Resultat der vorigen Betrachtung anwenden, und es wird

$$(21) \qquad \lim_{r=\infty} S_r = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \psi(\gamma, \lambda)\, d\lambda \right)_{\gamma=0},$$

d. h. gleich dem arithmetischen Mittel der Werte, die $\psi(\gamma, \lambda)$ für $\gamma = 0$, also $f(\vartheta_1, \varphi_1)$ im Punkte A annimmt. $\lim S_r$ für $r = \infty$ ist also allgemein gleich dem arithmetischen Mittel der Werte, welche $f(\vartheta_1, \varphi_1)$ im Punkte ϑ, φ der Kugel annimmt. Dabei wird vorausgesetzt, daß

$$(21\text{a}) \qquad \int_0^{2\pi} \psi(\gamma, \lambda)\, d\lambda$$

überall auf der Kugel endlich ist, was sicher der Fall ist, wenn $f(\vartheta_1, \varphi_1)$ überall endlich ist, ferner daß der Ausdruck (21a) in der unmittelbaren Nähe von $\gamma = 0$ kein Maximum oder Minimum hat; und das ist für Punkte der Kugel erfüllt, in deren Umgebung $f(\vartheta_1, \varphi_1)$ kontinuierlich ist. Für Funktionen $f(\vartheta_1, \varphi_1)$, die auf der ganzen Kugel endlich, einwertig und kontinuierlich sind, stellt daher die rechte Seite von (3) wirklich die Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ dar.

c) Anwendung auf die Entwicklung einer Funktion einer Veränderlichen nach einfachen Kugelfunktionen.

Aus der Entwicklung einer auf der Kugel gegebenen Funktion nach allgemeinen Kugelfunktionen ergibt sich die Entwicklung einer Funktion einer Veränderlichen nach einfachen Kugelfunktionen folgendermaßen. Ist die Funktion $f(\vartheta, \varphi) = \psi(\vartheta)$ von φ, also auch $f(\vartheta_1, \varphi_1) = \psi(\vartheta_1)$ von φ_1 unabhängig, so kann man die Reihe (3) so schreiben:

$$\psi(\vartheta) = \frac{1}{4\pi} \sum_0^\infty (2n+1) \int_0^\pi \psi(\vartheta_1) \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma) \, d\varphi_1$$

oder, wenn man noch Gleichung (15a), S. 71 anwendet,

$$(22) \quad \psi(\vartheta) = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} P_n(\cos\vartheta) \int_0^\pi \psi(\vartheta_1) P_n(\cos\vartheta_1) \sin\vartheta_1 d\vartheta_1 .$$

Für $\cos\vartheta = x$, $\cos\vartheta_1 = x_1$ nimmt (22), falls $\psi(\vartheta) = F(x)$ ist, die Form an:

$$(22\text{a}) \qquad F(x) = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} P_n(x) \int_{-1}^{+1} F(x_1) P_n(x_1) \, dx_1 ;$$

und diese Entwicklung gilt nach dem Obigen im allgemeinen nur für Werte von x zwischen -1 und $+1$, sie erfordert ferner, daß $f(x)$ zwischen $x = -1$ und $x = +1$ überall endlich und in der Nähe von x kontinuierlich ist. Weiter stellt die rechte Seite von (22a) $F(x)$ nur dar für solche x, für die $F(x)$ eindeutig ist. Ist $F(x)$ für irgendein x nicht eindeutig, so ist die rechte Seite von (22a) gleich dem arithmetischen Mittel der Werte, die F für dieses Argument annimmt.

Als **Beispiel** wollen wir eine Funktion nach Kugelfunktionen entwickeln, die für positive $x \leqq 1$ den Wert $+1$, für negative $x \geqq -1$ den Wert 0 hat; oder, was dasselbe, eine Funktion, die auf einer Halbkugel den Wert 1, auf

der andern den Wert 0 hat. Da in unserem Falle die Funktion $F(x_1)$ vom $x_1 = -1$ bis $x_1 = 0$ den Wert 0, von $x_1 = 0$ bis $x_1 = +1$ den Wert 1 hat, so reduziert sich die Gleichung (22a) auf

$$F = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} P_n(x) \int_0^1 P_n(x_1)\, dx_1 . \tag{23}$$

Die hierin auftretenden Integrale ergeben sich für $n > 0$ durch Benutzung der Differentialgleichung für P_n. Aus dieser folgt

$$\begin{aligned} n(n+1) \int_0^1 P_n(x_1)\, dx_1 &= -\int_0^1 \frac{d\,(1-x_1^2)\dfrac{d P_n(x_1)}{d x_1}}{d x_1}\, d x_1 \\ &= -\left[(1-x_1^2)\,\frac{d P_n(x_1)}{d x_1}\right]_0^1 . \end{aligned} \tag{24}$$

Für die Grenze 1 wird $(1-x_1^2) = 0$. Bezeichnet man noch die Ableitung von P_n mit P'_n, so wird

$$\int_0^1 P_n(x_1)\, dx_1 = \frac{P'_n(0)}{n(n+1)} \qquad (n > 0). \tag{24a}$$

Der Wert von $P'_n(0)$ ist durch (6), S. 12 gegeben; er ist $= 0$ für gerade n, so daß

$$\int_0^1 P_{2m}(x_1)\, dx_1 = 0 \qquad (m > 0) \tag{24b}$$

und nach der zitierten Gleichung

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_{2m+1}(x_1)\, dx_1 &= (-1)^m \frac{3 \cdot 5 \ldots (2m+1)}{2 \cdot 4 \ldots 2m} \frac{1}{(2m+1)(2m+2)} \\ &= (-1)^m \frac{1 \cdot 3 \ldots (2m-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2m} \cdot \frac{1}{2m+2} \\ &\qquad (m > 0) \end{aligned} \tag{24c}$$

wird. Für $m=0$ wird

$$(24\text{d})\quad \int_0^1 P_0(x_1)\,dx_1=\int_0^1 dx_1=1\,,\int_0^1 P_1(x_1)\,dx_1=\int_0^1 x_1\,dx_1=\frac{1}{2}.$$

Mithin läßt sich unsere Funktion F durch folgende Kugelfunktionenreihe darstellen:

$$(25)\quad F=\frac{1}{2}P_0(x)+\frac{3}{4}P_1(x)+\sum_1^\infty(-1)^m\frac{4m+3}{4m+4}\cdot\frac{1\cdot3\ldots(2m-1)}{2\cdot4\ldots2m}P_{2m+1}(x).$$

Wenden wir die Reihe auf $x=+1$ an, für welchen Wert $F=1$ ist, so ergibt sich

$$(26)\quad 1=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\sum_1^\infty(-1)^m\frac{4m+3}{4m+4}\cdot\frac{1\cdot3\ldots(2m-1)}{2\cdot4\ldots2m}.$$

Für $x=-1$, wo $F=0$ ist, folgt aus (15)

$$(26\text{a})\quad 0=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}-\sum_1^\infty(-1)^m\frac{4m+3}{4m+4}\cdot\frac{1\cdot3\ldots(2m-1)}{2\cdot4\ldots2m}.$$

(26) und (26a) sind identisch; man hat zugleich die in beiden auftretende Reihe summiert, ihre Summe ist $-\frac{1}{4}$.

Für $x=0$ gibt (25) $F=\frac{1}{2}$, d. i. das arithmetische Mittel der beiden Werte, welche F für $x=0$ annimmt, je nachdem x von positiven x oder von negativen x zu 0 übergeht.

---

*

II. Abschnitt.

Die Potentialaufgaben für die Kugel. Elektrizitätsverteilung auf einer Kugel.

Kapitel 1.

Das Potential einer Kugelfläche bei beliebiger Massenverteilung.

Das Potential einer Kugelfläche vom Radius R, die mit Masse von der Dichtigkeit $\varkappa$ belegt ist, ist

$$(1) \qquad V = \int\int \frac{\varkappa R^2 \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1}{\varrho} .$$

Darin sind $R, \vartheta_1, \varphi_1$ die räumlichen Polarkoordinaten eines Punktes der Kugelfläche, r, ϑ, φ die des angezogenen Punktes und

$$(1\text{a}) \qquad \begin{aligned} \varrho^2 &= r^2 + R^2 - 2 r R \cos\gamma , \\ \cos\gamma &= \cos\vartheta \cos\vartheta_1 + \sin\vartheta \sin\vartheta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi) . \end{aligned}$$

Die Dichtigkeit $\varkappa$, die eine gegebene Funktion von ϑ_1, φ_1 ist, entwickle man nun nach Kugelfunktionen

$$(2) \qquad \varkappa = \sum K_m(\vartheta_1, \varphi_1) ,$$

wo nach S. 81

$$(2\text{a}) \quad K_m(\vartheta_1, \varphi_1) = \frac{2m+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varkappa(\vartheta_2, \varphi_2) P_m(\cos\gamma_2) \sin\vartheta_2 \, d\vartheta_2 \, d\varphi_2 ,$$

$$\cos\gamma_2 = \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

ist. Die Entwicklung gilt stets, wenn die Dichtigkeit eine überall endliche Funktion von ϑ_1, φ_1 ist. Ferner ist nach (2), S. 11, je nachdem $r > R$ oder $r < R$,

$$\frac{1}{\varrho}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\gamma)\qquad(r>R),\tag{3a}$$

$$\frac{1}{\varrho}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{R^{n+1}}P_n(\cos\gamma)\qquad(r<R).\tag{3b}$$

Die Einsetzung von (2) und (3a) in (1) ergibt für das Potential der Kugelfläche in bezug auf **außerhalb** liegende Punkte

$$V_a=R^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum K_m(\vartheta_1,\varphi_1)\right\}\cdot\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\gamma)\right\}\cdot\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1\,d\varphi_1 .$$

Da die beiden hier auftretenden Reihen konvergent sind, kann man sie gliedweise multiplizieren und darauf gliedweise integrieren. Dadurch erhält man Integrale der Form

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}K_m(\vartheta_1,\varphi_1)P_n(\cos\gamma)\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1\,d\varphi_1,$$

die nach Satz I, S. 76 für $m\gtrless n$ verschwinden, dagegen für $m=n$ nach Satz III, S. 79, 80 den Wert

$$\frac{4\pi}{2n+1}K_n(\vartheta,\varphi)$$

haben. Demnach wird

$$V_a=4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{R^{n+2}}{r^{n+1}}K_n(\vartheta,\varphi),\tag{4a}$$

und analog ergibt sich, wenn man (3b) statt (3a) benutzt, für das Potential innerer Punkte

$$V_i=4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{r^n}{R^{n-1}}K_n(\vartheta,\varphi).\tag{4b}$$

Hat man also die Dichtigkeit $\varkappa$ in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe entwickelt, so ergeben die vorstehenden Formeln (4a), (4b) sofort das Potential der Kugelfläche für äußere und innere Punkte.

Das erste Glied der Entwicklung ($n=0$) in V_a ist

$$4\pi \frac{R^2}{r} K_0(\vartheta, \varphi) = \frac{M}{r}, \tag{5a}$$

falls M die gesamte auf der Kugelfläche ausgebreitete Masse ist. Denn es ist

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varkappa(\vartheta_1, \varphi_1) R^2 \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\sum K_m(\vartheta_1, \varphi_1)\right] P_0(\cos\gamma) \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1$$

(Der Faktor $P_0(\cos\gamma)$ konnte hinzugefügt werden, da er $=1$ ist.) Durch Anwendung der Integralsätze der Kugelfunktionen folgt

$$M = 4\pi R^2 K_0(\vartheta, \varphi).$$

Das erste Glied in der Reihe (4b) ist

$$4\pi R K_0(\vartheta, \varphi) = \frac{M}{R}. \tag{5b}$$

Anwendungen auf spezielle Fälle.

1) Falls die Kugelfläche gleichförmig mit Masse belegt, also $\varkappa$ konstant ist, reduziert sich die Reihe (2) für $\varkappa$ auf das erste Glied $K_0(\vartheta, \varphi)$, demnach folgt das bekannte Resultat (vgl. Teil I, S. 83)

$$V_a = \frac{M}{r}, \quad V_i = \frac{M}{R}.$$

Das Resultat kann für $\varkappa = 1$ auch folgendermaßen ausgesprochen werden:

Ist ϱ' der Abstand eines Punktes Q der Kugelfläche mit dem Radius R von einem außerhalb der Kugel liegenden Punkte P', ϱ der Abstand des Punktes Q von einem inneren Punkte P, so ist

$$\iint \frac{do}{\varrho'} = \frac{4\pi R^2}{r}, \quad \iint \frac{do}{\varrho} = 4\pi R, \tag{A}$$

wo r den Abstand des Punktes P' vom Kugelmittelpunkte bezeichnet und die Integration über die Kugelfläche aus-

zudehnen ist. Beide Resultate gelten noch, wenn entweder P' oder P auf der Kugel selbst liegen.

2) Ist

$$\varkappa = m \cos \vartheta_1 ,$$

wo m eine Konstante, so verschwinden in der Reihe (2) alle K außer K_1; $K_1(\vartheta_1, \varphi_1)$ wird $m \cos \vartheta_1$. Daher folgt aus (4a), (4b)

$$V_a = m \frac{4\pi}{3} \frac{R^3}{r^2} \cos \vartheta , \quad V_i = m \frac{4\pi}{3} r \cos \vartheta ,$$

ein Resultat, das im ersten Teil S. 108—109 auf anderem Wege abgeleitet ist.

3) Die Dichtigkeit sei

$$\varkappa = k_0 + k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2 ,$$

wo x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Kugelfläche, k_0, k_1, k_2, k_3 konstant sind. Drückt man x, y, z durch Polarkoordinaten aus, deren Achse die x-Achse ist, so wird

$$\varkappa = k_0 + R^2 [k_1 \cos^2 \vartheta + k_2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + k_3 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi] .$$

Diese Funktion $\varkappa$ ist bereits früher nach Kugelfunktionen entwickelt (s. S. 85); mit Benutzung dieser Entwicklung wird

$$V_a = 4\pi \frac{R^2}{r} K_0(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi}{5} \frac{R^4}{r^3} K_2(\vartheta, \varphi),$$

$$V_i = 4\pi R K_0(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi}{5} \frac{r^2}{R} K_2(\vartheta, \varphi),$$

$$K_0(\vartheta, \varphi) = k_0 + \frac{R^2 (k_1 + k_2 + k_3)}{3},$$

$$K_2(\vartheta, \varphi) = R^2 \left\{ \left(k_1 - \frac{k_2 + k_3}{2} \right) \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3} \right) + \frac{k_2 - k_3}{2} \sin^2 \vartheta \cos(2\varphi) \right\}.$$

4) Wir wenden die allgemeinen Formeln (4a), (4b), die für beliebige Massenverteilung auf der Kugel gelten, auf zwei konjugierte Punkte an, d. h. auf zwei Punkte, die auf demselben Radius liegen, und deren Abstände r_0, r_1 vom Kugelmittelpunkte der Gleichung genügen:

(6) $$r_0 r_1 = R^2.$$

Das Potential V_0 für den Punkt P_0 ist ($r_0 < R$ vorausgesetzt), durch (4b) gegeben, darin r_0 statt r gesetzt, während für das Potential V_1 des Punktes P_1 die Gleichung (4a) gilt, darin r_1 statt r gesetzt. Nach (6) ist nun

$$\frac{1}{r_1^{n+1}} = \frac{r_0^{n+1}}{R^{2n+2}},$$

daher

$$\frac{R^{n+2}}{r_1^{n+1}} = \frac{r_0^{n+1}}{R^n} = \frac{r_0^n}{R^{n-1}} \cdot \frac{r_0}{R}.$$

Somit gilt für jede beliebige Massenverteilung auf der Kugel für die Potentiale zweier konjugierten Punkte die Beziehung

(6a) $$V_1 = V_0 \cdot \frac{r_0}{R} = V_0 \frac{R}{r_1}.$$

Dasselbe Resultat folgt für $r_0 > R$, da durch Vertauschung von r_0 und r_1 Gleichung (6) sich nicht ändert.

Folgerung aus den vorstehenden Resultaten. Bei der Ableitung von (4a) ist ausdrücklich $r > R$, bei der von (4b) $r < R_0$ vorausgesetzt. Beide gelten aber noch für $r = R$, d. h. für den Fall, daß der angezogene Punkt auf der Kugelfläche liegt; beide ergeben in diesem Falle

(7) $$\overline{V} = 4\pi R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} K_n(\vartheta, \varphi),$$

und die hierin vorkommende Reihe ist sicher konvergent, wenn es die Reihe (2) ist.

Aus (7) folgt, daß man, um V für äußere oder innere Punkte zu bestimmen, gar nicht die Dichtigkeit $\varkappa$ der Massenverteilung zu kennen braucht, sondern daß statt dessen der Wert gegeben sein kann, den das Potential an der Oberfläche der Kugel annimmt.

Ist $\overline{V} = F(\vartheta, \varphi)$ dieser gegebene Wert, so entwickle man $F(\vartheta, \varphi)$ nach Kugelfunktionen

(8) $$\overline{V} = F(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \varphi).$$

Für $\overline{V}$ gilt sowohl diese Gleichung, als die Gleichung (7), und da eine Funktion $\overline{V}$ nur auf eine Art nach Kugelfunktionen entwickelt werden kann, so ist für jedes n

$$\frac{4\pi R}{2n+1} K_n(\vartheta, \varphi) = Y_n(\vartheta, \varphi)$$

und daher

$$(9) \qquad \begin{cases} V_a = \sum_0^\infty \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\vartheta, \varphi), \\ V_i = \sum_0^\infty \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\vartheta, \varphi). \end{cases}$$

Die zugehörende Dichtigkeit der Massenverteilung ist

$$(9\mathrm{a}) \qquad \varkappa(\vartheta_1, \varphi_1) = \frac{1}{4\pi R} \sum_0^\infty (2n+1)\, Y_n(\vartheta_1, \varphi_1).$$

Man kann übrigens die Potentiale V_a, V_i direkt durch den gegebenen Oberflächenwert $\overline{V} = F(\vartheta, \varphi)$ darstellen, ohne erst F nach Kugelfunktionen zu entwickeln. Nach (2a) S. 81 hat Y_n den Wert

$$(8\mathrm{a}) \quad Y_n(\vartheta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\vartheta_1, \varphi_1) P_n(\cos\gamma) \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1,$$

so daß

$$(9^{\mathrm{I}}) \quad V_i = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^\infty (2n+1) \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\vartheta_1, \varphi_1) P_n(\cos\gamma) \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1$$

wird. [V_a ergibt sich daraus, wenn man $\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$ an Stelle von $\left(\frac{r}{R}\right)^n$ setzt.] Konvergiert die Reihe (8), und unter welchen Bedingungen das stattfindet, ist in Kap. 6 des vorigen Abschnitts erörtert, so konvergiert sicher auch die Reihe (9^{I}), deren Glieder ja aus denen von (8) durch Multiplikation mit echten Brüchen entstehen. Man kann

dann die Summe der Integrale durch das Integral der Summe ersetzen und erhält

$$(9^{\text{II}})\quad V_i = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(\vartheta_1,\varphi_1)\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\gamma)\right]\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1$$

Die in (9^{II}) enthaltene Reihe läßt sich nun summieren. Denn differentiiert man die Gleichung

$$(10)\quad \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}} = \sum_0^{\infty}\alpha^n P_n(\cos\gamma)\qquad (\alpha<1)$$

nach α, so erhält man

$$(10\text{a})\quad \frac{\cos\gamma-\alpha}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^3}} = \sum_0^{\infty} n\,\alpha^{n-1} P_n(\cos\gamma),$$

und die Reihe (10a) konvergiert unter denselben Bedingungen wie (10), d. h. für $\alpha<1$. Multipliziert man (10a) mit 2α und addiert dazu (10), so folgt

$$(10\text{b})\quad \frac{1-\alpha^2}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^3}} = \sum_0^{\infty}(2n+1)\,\alpha^n P_n(\cos\gamma).$$

Mittels (10b) kann man die in (9^{II}) auftretende Reihe summieren und erhält

$$(11)\quad V_i = \frac{R(R^2-r^2)}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{F(\vartheta_1,\varphi_1)\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1}{\sqrt{(r^2+R^2-2rR\cos\gamma)^3}}.$$

Entsprechend ergibt sich für V_a der Ausdruck

$$(11\text{a})\quad V_a = \frac{R(r^2-R^2)}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{F(\vartheta_1,\varphi_1)\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1}{\sqrt{(r^2+R^2-2rR\cos\gamma)^3}}.$$

Diese Integraldarstellungen von V_i und V_a, in denen $F(\vartheta,\varphi)$ den Wert bezeichnet, den V_i sowohl, als V_a an der Oberfläche der Kugel annehmen, bezeichnet man als Poissonsche Integrale.

Zusatz. In derselben Weise wie das Potential der einfach mit Masse belegten Kugelfläche ergibt sich das Potential einer Doppelbelegung der Kugel. Das Potential der Doppelbelegung einer beliebigen Fläche hat nach Teil I, S. 153 die Form

$$U = -\int\int \mu \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N} d o .$$

Darin ist bei geschlossenen Flächen N die äußere Normale, und diese ist bei der Kugel der Radius R. Für die Kugel erhalten wir also

$$U = -R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mu \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial R} \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1 .$$

Das Moment μ der Doppelbelegung ist irgendeine gegebene Funktion von ϑ_1, φ_1, die von R unabhängig ist, somit hat man, da auch die Integrationsgrenzen von R unabhängig sind, für die Kugel

$$(12) \qquad U = -R^2 \frac{\partial}{\partial R}\left\{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\mu \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1}{\varrho}\right\}.$$

Das nach R zu differentiierende Integral hat genau die Form wie oben (S. 97) $V:R^2$. Man kann darauf das für $V:R^2$ abgeleitete Resultat anwenden. Entwickelt man das gegebene Moment μ nach Kugelfunktionen

$$(13) \qquad \mu = \sum_0^\infty X_n(\vartheta_1, \varphi_1),$$

so erhält man nach dem Gesagten für äußere Punkte

$$U_a = -R^2 \frac{\partial}{\partial R}\left\{\sum_{n=0}^\infty \frac{4\pi}{2n+1} \frac{R^n}{r^{n+1}} X_n(\vartheta, \varphi)\right\},$$

für innere

$$U_i = -R^2 \frac{\partial}{\partial R}\left\{\sum_{n=0}^\infty \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r^n}{R^{n+1}} X_n(\vartheta, \varphi)\right\},$$

d. h.

$$(14)\quad \begin{cases} U_a = -4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} X_n(\vartheta, \varphi), \\ U_i = +4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{n} X_n(\vartheta, \varphi). \end{cases}$$

Aus den Ausdrücken (14) folgt

$$\lim_{r=R} (U_a - U_i) = -4\pi(\mu),$$

$$\lim_{r=R} \left(\frac{\partial U_a}{\partial r} - \frac{\partial U_i}{\partial r}\right) = 0,$$

$$\lim_{r=R} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U_a}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r}\frac{\partial U_i}{\partial \vartheta}\right) = -4\pi \frac{1}{R}\frac{\partial(\mu)}{\partial \vartheta},$$

$$\lim_{r=R} \left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial U_a}{\partial \varphi} - \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial U_i}{\partial \varphi}\right) = -4\pi \frac{1}{R\sin\vartheta}\frac{\partial(\mu)}{\partial \varphi},$$

in Übereinstimmung mit den allgemeinen in Teil I, Abschnitt II, Kap. 4 aufgestellten Sätzen.

Kapitel 2.

Das Potential einer räumlichen, von konzentrischen Kugeln begrenzten Masse. Satz von der äquivalenten Massentransposition.

Die Dichtigkeit der von zwei konzentrischen Kugeln mit den Radien R und R_0 $(R > R_0)$ begrenzten Masse sei $k(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$, so ist ihr Potential

$$(1)\quad W = \int_{R_0}^{R}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{k(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)\, r_1^2\, dr_1 \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\gamma}}.$$

Darin sind r, ϑ, φ die Polarkoordinaten des angezogenen Punktes; $\cos\gamma$ hat denselben Wert wie in (1a), S. 97. Der Ausdruck (1) ist ganz analog dem im vorigen Kapitel behandelten Ausdruck für V, nur daß hier r_1 das dortige

R ersetzt, und daß außerdem nach r_1 zu integrieren ist. Wir verfahren nun ganz wie dort und entwickeln zuerst k, als Funktion von ϑ_1, φ_1 angesehen, nach Kugelfunktionen

(2) $$k = \sum X_m(r_1, \vartheta_1, \varphi_1).$$

Darin hat X_m die Form jeder Kugelfunktion

(2a) $$X_m(r_1, \vartheta_1, \varphi_1) = \sum_{\mu=0}^{m} P_{m,\mu}(\cos\vartheta_1)\left\{A_\mu \cos(\mu\varphi_1) + B_\mu \sin(\mu\varphi_1)\right\},$$

und die Größen A_μ, B_μ, die in bezug auf ϑ_1, φ_1 Konstante sind, hängen im allgemeinen von r_1 ab. Weiter ist auch

$$1 : \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos\gamma}$$

nach Kugelfunktionen zu entwickeln und das Produkt beider Reihen, mit $\sin\vartheta_1$ multipliziert, nach ϑ_1 und φ_1 zu integrieren, genau wie in Kap. 1, so erhält man:

a) wenn $r > R$, und damit $r >$ als jedes r_1, d. h. wenn der angezogene Punkt außerhalb der Kugel mit dem größeren Radius liegt,

(3) $$W_a = \int_{R_0}^{R} r_1^2\, d r_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r_1^n}{r^{n+1}} X_n(r_1, \vartheta, \varphi)$$

$$= 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{R_0}^{R} r_1^{n+2} X_n(r_1, \vartheta, \varphi)\, d r_1 .$$

b) Ebenso wird, wenn $r < R_0$, d. h. wenn der angezogene Punkt im inneren hohlen Raume liegt,

(4) $$W_i = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} r^n \int_{R_0}^{R} \frac{X_n(r_1, \vartheta, \varphi)}{r_1^{n-1}}\, d r_1 .$$

Das erste Glied der Entwicklung von (3) ist wieder $\frac{M}{r}$, da hier, analog wie S. 99,

$$M = \int_{R_0}^{R} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} k(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)\, r_1^2\, d r_1 \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1 = 4\pi \int_{R_0}^{R} r_1^2 X_0\, d r_1 .$$

X_0, die Kugelfunktion 0-ter Ordnung, ist dabei von ϑ_1, φ_1 unabhängig, nur von r_1 abhängig. — Das erste Glied der Reihe (4) ist dagegen

$$4\pi \int_{R_0}^{R} r_1 X_0 \, d r_1 .$$

Die Formel für W_a gilt noch für $r = R$; denn konvergiert die Reihe (2), so ist die Reihe

$$r_1 \sum_0^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{r_1}{R}\right)^{n+1} X_n(r_1, \vartheta, \varphi),$$

deren einzelne Glieder aus denen der Reihe (2) durch Multiplikation mit echten Brüchen entstehen, sicher konvergent. Ebenso gilt die Formel für W_i noch für $r = R_0$.

c) Um das Potential für Punkte der Masse zu erhalten, für die

$$R > r > R_0,$$

teile man die Masse durch eine zu den gegebenen Kugeln konzentrische vom Radius r (d. h. durch eine durch den angezogenen Punkt P gehende Kugel) in zwei Teile, I und II. Für den ersten, von den Kugeln R und r begrenzten Teil hat P die Grenzlage eines inneren Punktes. Für diesen Teil gilt die Formel (4), wenn man darin R_0 durch r ersetzt. Für den zweiten, von den Kugeln r und R_0 begrenzten Teil hat P die Grenzlage der äußeren Punkte. Für diesen Teil gilt die Formel (3), wenn man darin R durch r ersetzt. Das Gesamtpotential, d. i. die Summe der Potentiale der Teile I und II, wird daher

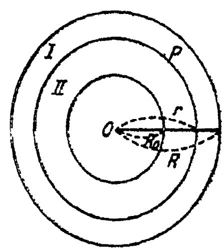

Fig. 4.

$$(5)\quad W_m = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ r^n \int_r^R \frac{X_n(r_1, \vartheta, \varphi)}{r_1^{n-1}} d r_1 + \frac{1}{r^{n+1}} \int_{R_0}^{r} X_n(r_1, \vartheta, \varphi)\, r_1^{n+2} \, d r_1 \right\}.$$

Die Formeln (3) und (5) gelten auch für den Fall einer Vollkugel. Man hat für diese nur $R_0 = 0$ zu setzen.

Anwendung auf spezielle Fälle.

1. Ist die Dichtigkeit k von ϑ_1 und φ_1 unabhängig, aber eine beliebige (endliche) Funktion von r_1, so verschwinden alle X_m außer X_0, und es wird

$$W_a = \frac{M}{r}, W_i = 4\pi \int_{R_0}^{R} k(r_1) r_1 dr_1, W_m = 4\pi \left\{ \int_{r}^{R} k(r_1) r_1 dr_1 + \frac{1}{r} \int_{R_0}^{r} k(r_1) r_1^2 dr_1 \right\}.$$

2. Ist die Dichtigkeit

$$k = k_0 + k_1 x_1^2 + k_2 y_1^2 + k_3 z_1^2,$$

worin x_1, y_1, z_1 die rechtwinkligen Koordinaten der Massenpunkte, k_0, k_1, k_2, k_3 konstant sind, oder in Polarkoordinaten

$$k = k_0 + r_1^2 \left[k_1 \cos^2 \vartheta_1 + k_2 \sin^2 \vartheta_1 \cos^2 \varphi_1 + k_3 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi_1\right],$$

so ist

$$X_0(r_1, \vartheta_1, \varphi_1) = k_0 + \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} r_1^2,$$

$$X_2(r_1, \vartheta_1, \varphi_1) = r_1^2 \left[\left(k_1 - \frac{k_2 + k_3}{2}\right)\left(\cos^2 \vartheta_1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{k_2 - k_3}{2} \sin^2 \vartheta_1 \cos(2\varphi_1)\right],$$

während alle übrigen X verschwinden. Daher wird

$$W_a = \frac{4\pi}{3r}\left[k_0 (R^3 - R_0^3) + \frac{k_1 + k_2 + k_3}{5} (R^5 - R_0^5)\right]$$
$$+ \frac{4\pi}{5 r^3}\left(\frac{R^7 - R_0^7}{7}\right)\left[\left(k_1 - \frac{k_2 + k_3}{2}\right)\left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3}\right) + \frac{k_2 - k_3}{2} \sin^2 \vartheta \cos(2\varphi)\right],$$

$$W_i = 4\pi \left[k_0 \frac{R^2 - R_0^2}{2} + \frac{k_1 + k_2 + k_3}{12} (R^4 - R_0^4)\right]$$
$$+ \frac{4\pi}{5} r^2 \frac{R^2 - R_0^2}{2} \left[\left(k_1 - \frac{k_2 + k_3}{2}\right)\left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3}\right) + \frac{k_2 - k_3}{2} \sin^2 \vartheta (\cos 2\varphi)\right],$$

$$W_m = 4\pi k_0 \left(\frac{R^2 - r^2}{2} + \frac{r^3 - R_0^3}{3r}\right) + \frac{4\pi}{3}(k_1 + k_2 + k_3)\left(\frac{R^4 - r^4}{4} + \frac{r^5 - R_0^5}{5r}\right)$$
$$+ \frac{4\pi}{5}\left[r^2 \left(\frac{R^2 - r^2}{2}\right) + \frac{r^7 - R_0^7}{7 r^3}\right]\left[\left(k_1 - \frac{k_2 + k_3}{2}\right)\left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{k_2 - k_3}{2} \sin^2 \vartheta \cos(2\varphi)\right]$$

Folgerung aus den vorstehenden Resultaten. Wendet man die Formel (3) auf $r = R$, (4) auf $r = R_0$ an, so ergibt sich

$$(6)\quad (W_a)_{r=R} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{R^{n+1}} \int_{R_0}^{R} r_1^{n+2} X_n(r_1, \vartheta, \varphi)\, d r_1,$$

$$(7)\quad (W_i)_{r=R_0} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} R_0^n \int_{R_0}^{R} \frac{X_n(r_1, \vartheta, \varphi)}{r_1^{n-1}}\, d r_1.$$

An diese Gleichungen kann man einen ähnlichen Schluß knüpfen wie in Kap. 1 dieses Abschnitts, nämlich daß man, um W_a für beliebige $r > R$ zu bestimmen, gar nicht die Dichtigkeit $k(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ zu kennen braucht, sondern daß es genügt, die Werte von W_a an der Kugelfläche $r = R$ zu kennen; und daß es ebenso genügt, die Werte von W_i an der Kugelfläche $r = R_0$ zu kennen, um W_i für beliebige $r < R_0$ zu ermitteln.

Denn ist $(W_a)_{r=R} = F(\vartheta, \varphi)$ gegeben, so entwickle man F nach Kugelfunktionen

$$(8)\qquad (W_a)_{r=R} = F(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \varphi),$$

so hat man durch (6) und (8) eine doppelte Entwicklung derselben Funktion nach Kugelfunktionen, daher muß für jedes n

$$(9)\qquad \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{R^{n+1}} \int_{R_0}^{R} r_1^{n+2} X_n(r_1, \vartheta, \varphi)\, d r_1 = Y_n(\vartheta, \varphi)$$

und wegen (9) geht (3) über in

$$(10)\qquad W_a = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\vartheta, \varphi).$$

Ebenso erhält man, wenn

$$(8a)\qquad (W_i)_{r=R_0} = F_1(\vartheta, \varphi) = \sum_{0}^{\infty} Z_n(\vartheta, \varphi)$$

ist

$$W_i = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R_0}\right)^n Z_n(\vartheta, \varphi). \tag{10a}$$

Übrigens lassen sich W_a und W_i statt durch Reihen durch Integrale darstellen, deren ersteres über die Kugelfläche R, das zweite über die Kugelfläche R_0 zu erstrecken ist, genau wie in Kap. 1, S. 102—103 die Poissonschen Integraldarstellungen für V_a und V_i abgeleitet sind.

Man bezeichnet die Aufgabe, sei es, wie in Kap. 1 V_a und V_i, oder wie hier W_a und W_i aus ihren Werten an der Kugelfläche R, resp. R_0 zu ermitteln, als erste Randwertaufgabe für Kugeln.

Der Umstand, daß die Lösung der Randwertaufgabe dieselbe ist, mögen wie in Kap. 1 die wirkenden Massen auf einer Kugelfläche ausgebreitet sein, oder mag es sich um räumliche Massen handeln, führt auf den Satz von der äquivalenten Massentransposition.

Satz. Die Wirkung einer innerhalb einer Kugelschale (oder auch einer Vollkugel) liegenden Masse auf äußere Punkte kann man stets und nur auf eine Weise ersetzen durch die Wirkung einer Massenbelegung der äußeren Kugelfläche R; und zwar ist die Gesamtmasse, mit der die Kugelfläche zu belegen ist, gleich der in der Kugelschale (oder der Vollkugel) enthaltenen Masse.

Beweis. Es sei einerseits der Raum zwischen den konzentrischen Kugeln R und R_0 mit Masse von beliebiger Dichtigkeit erfüllt, so ist das Potential W_a dieser Masse für äußere Punkte durch Gleichung (3), S. 106 bestimmt. Andererseits sei eine zweite Masse auf der Kugelfläche R ausgebreitet, so ist ihr Potential V_a für äußere Punkte durch Gleichung (4a), S. 98 bestimmt. Sollen beide Massen auf alle äußeren Punkte dieselbe Wirkung ausüben, so muß

$$\frac{\partial W_a}{\partial x} = \frac{\partial V_a}{\partial x}, \quad \frac{\partial W_a}{\partial y} = \frac{\partial V_a}{\partial y}, \quad \frac{\partial W_a}{\partial z} = \frac{\partial V_a}{\partial z}$$

oder

$$W_a = V_a + C \tag{11}$$

sein, wo C eine von den Koordinaten des angezogenen Punktes unabhängige Konstante ist. Die Gleichung (11)

muß für jedes r stattfinden, auch wenn r beliebig groß, schließlich $r=\infty$ wird. Dann verschwinden aber W_a sowohl, als V_a, also ist

$$(11a) \qquad C=0, \quad W_a = V_a.$$

Setzt man für W_a und V_a die für sie geltenden Reihen ein, so müssen beide Reihen für alle r denselben Wert geben, mithin müssen die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von r gleich sein, d. h. für jedes n muß

$$(12) \qquad R^{n+2} K_n(\vartheta, \varphi) = \int_{R_0}^{R} r_1^{n+2} X_n(r_1, \vartheta, \varphi)\, d r_1$$

sein. Für die Dichtigkeit der auf der Kugelfläche auszubreitenden Masse ergibt sich damit der Wert

$$(13) \quad \varkappa(\vartheta_1, \varphi_1) = \sum_0^\infty K_n(\vartheta_1, \varphi_1) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{R^{n+2}} \int_{R_0}^{R} r_1^{n+2} X_n(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)\, d r_1$$

Damit ist $\varkappa$ eindeutig bestimmt, wenn die Dichtigkeit $k(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ und mit ihr die $X_n(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ gegeben sind [nicht aber ist umgekehrt, wenn $\varkappa$ und damit die K_n gegeben, X_n und damit k bestimmt]. Ferner ist, wenn M die gesamte räumliche, M' die gesamte auf der Kugel R ausgebreitete Masse ist, das erste Glied von $W_a = \frac{M}{r}$, das erste Glied von $V_a = \frac{M'}{r}$. Da auch diese Glieder gleich sein müssen, ist $M = M'$. — Damit ist der Satz bewiesen.

Zusatz 1. Genau ebenso kann man zeigen, daß die Wirkung, welche die Masse innerhalb der Schale R, R_0 auf Punkte des inneren hohlen Raumes ausübt, ersetzt werden kann durch die Wirkung einer auf der Kugelfläche R_0 verteilten Masse. Nur sind hier die beiden Massen nicht gleich.

Beweis. Die Gleichheit beider Wirkungen bedingt auch hier, daß

$$(11b) \qquad W_i = V_i + C$$

ist, wo W_i die Reihe (4), S. 106, V_i die Reihe (4b), S. 98 ist, in letzterer jedoch R durch R_0 ersetzt. Hier ist kein

Grund, $C=0$ zu setzen, C kann vielmehr beliebig sein. In den Reihen für W_i und V_i müssen wieder alle Glieder entsprechend gleich sein; nur die Glieder für $n=0$, die ja konstant sind, unterscheiden sich um C. Das erste Glied K_0 der Entwicklung von $\varkappa$ ist somit nicht bestimmt, und daher ist die ganze auf R_0 auszubreitende Masse unbestimmt. Diese Unbestimmtheit ist dadurch begründet, daß eine mit konstanter Dichtigkeit auf einer Kugelfläche verteilte Masse auf einen inneren Punkt keine Wirkung ausübt.

Zusatz 2. Sind die innerhalb der Kugelschale liegenden Massen so verteilt, daß ihr Potential für alle Punkte von R_0 denselben Wert hat, so hat ihr Potential auch für alle inneren Punkte denselben konstanten Wert.

Denn soll $(W_i)_{r=R_0}$ von ϑ, φ unabhängig sein, so sind in (8a), S. 109 alle $Z_n=0$, außer Z_0. Daher ergibt (10a) für alle inneren Punkte $W_i=Z_0$.

Kapitel 3.

Ableitung der Lösung der Randwertaufgabe aus der Laplaceschen Gleichung. Anwendung auf die Greensche Funktion der Kugel.

Zu den Formeln (9) des ersten, resp. zu den Formeln (10) und (10a) des zweiten Kapitels kann man auch von der Laplaceschen Differentialgleichung aus gelangen.

a) Innerhalb einer Kugel vom Radius R seien beliebige räumliche oder auf Flächen ausgebreitete Massen enthalten, ein Teil dieser Massen kann auch auf der Kugelfläche R selbst verteilt sein. Das Potential W dieser Massen genügt in dem Raume außerhalb der Kugel R der Laplaceschen Gleichung, die, auf räumliche Polarkoordinaten transformiert, lautet:

$$(1) \qquad \frac{\partial r^2 \frac{\partial W}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta \frac{\partial W}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Es ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung zu suchen, die zugleich die übrigen charakteristischen Eigenschaften des Potentials (für Punkte außerhalb der Masse) besitzt,

also in dem betrachteten Raume überall nebst ihren Ableitungen eindeutig, endlich und stetig ist und im Unendlichen verschwindet. Wir untersuchen zunächst, ob es möglich ist, der Gleichung (1) durch das Produkt dreier Funktionen zu genügen, deren jede nur von einer der Variabeln r, ϑ, φ abhängt:

$$W = W_1 W_2 W_3, \tag{2}$$

wo W_1 nur von r, W_2 nur von ϑ, W_3 nur von φ abhängt. Setzt man (2) in (1) ein und dividiert dann durch $W_1 W_2 W_3$, so erhält man

$$\frac{1}{W_1}\frac{d r^2 \frac{d W_1}{d r}}{d r} = -\left\{\frac{1}{W_2 \sin\vartheta}\frac{d \sin\vartheta \frac{d W_2}{d\vartheta}}{d\vartheta} + \frac{1}{W_3 \sin^2\vartheta}\frac{d^2 W_3}{d\varphi^2}\right\}. \tag{3}$$

Die rechte Seite von (3) ist von r unabhängig, dasselbe gilt also auch von der linken Seite, und da diese unserm Ansatze zufolge weder ϑ, noch φ enthält, so muß sie gleich einer Konstanten sein, d. h. wir erhalten für W_1 die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d r^2 \frac{d W_1}{d r}}{d r} = a W_1. \tag{4}$$

Ihr genügt

$$W_1 = r^\alpha,$$

falls

$$\alpha(\alpha + 1) = a$$

ist. Da a eine beliebige Konstante bezeichnet, können wir sie durch die andere Konstante α ersetzen, d. h. (4) folgendermaßen schreiben:

$$\frac{d r^2 \frac{d W_1}{d r}}{d r} = \alpha(\alpha + 1) W_1, \tag{4a}$$

und dieser Gleichung genügt sowohl r^α, als $r^{-(\alpha+1)}$, ihr allgemeines Integral ist daher

$$W_1 = A_1 r^\alpha + \frac{A}{r^{\alpha+1}}, \tag{5}$$

wo A_1 und A willkürliche Konstante sind. Nun muß W, daher W_1 für $r=\infty$ verschwinden, doch so, daß $\lim(r W_1)$ endlich ist, daher muß entweder $\alpha>0$ und $A_1=0$ oder $\alpha<-1$ und $A=0$ sein. Beide Fälle unterscheiden sich nur in der Bezeichnung, d. h. es wird

$$(5\text{a}) \qquad W_1 = \frac{A}{r^{\alpha+1}} \qquad (\alpha>0).$$

Zugleich geht (3) in

$$(6) \qquad \sin^2\vartheta \left\{\alpha(\alpha+1) + \frac{1}{W_2 \sin\vartheta} \frac{d \sin\vartheta \dfrac{d W_2}{d\vartheta}}{d\vartheta}\right\} = -\frac{1}{W_3}\frac{d^2 W_3}{d\varphi^2}$$

über. Das ist eine Gleichung derselben Form, wie sie schon früher bei der Bestimmung der Form der allgemeinen Kugelfunktionen behandelt ist [Gl. (17a), S. 72], nur daß in (6) eine beliebige positive Konstante α auftritt, dort aber eine ganze Zahl n. Wie dort, folgt zunächst, daß W_3 die Form haben muß

$$(7) \qquad W_3 = C\cos(\nu\varphi) + C'\sin(\nu\varphi),$$

wo ν eine positive ganze Zahl oder Null ist, und daß W_2 der Differentialgleichung der Zugeordneten genügt, darin den Parameter n durch α ersetzt. Nun wissen wir, daß die Differentialgleichung der Zugeordneten, falls der Parameter n keine ganze Zahl ist, weder für $\nu=0$ [vgl. S. 49], noch für $\nu>0$ [vgl. S. 65, Zusatz] ein Integral besitzt, das gleichzeitig für $\cos\vartheta=1$ und $\cos\vartheta=-1$ endlich ist, und daß ein Gleiches auch stattfindet, wenn n zwar eine ganze Zahl, aber $<\nu$ ist [vgl. S. 65]. Da W in dem betrachteten Raume überall endlich sein soll, muß W_2 dieselbe Eigenschaft haben, und das ist nur möglich, wenn für die bis dahin beliebige Konstante α eine ganze Zahl $\geqq\nu$ oder Null gesetzt wird. Auch bei Erfüllung dieser Forderung kommt von den beiden Integralen der Gleichung der Zugeordneten nur das Integral $P_{n,\nu}(\cos\vartheta)$ in Betracht, da $Q_{n,\nu}(\cos\vartheta)$ für $\cos\vartheta=\pm1$ unendlich wird. Somit ist in (5a)

$$(8) \qquad \alpha = \text{einer ganzen Zahl } n \geqq \nu \text{ oder } =0,$$

ferner ist

$$(9) \qquad W_2 = B\, P_{n,\nu}(\cos\vartheta).$$

Unser Ansatz (2) ergibt demnach als einzige Lösung von (1), die diese Form hat und zugleich die sonstigen Eigenschaften des Potentials besitzt,

$$(10)\quad W = A\,B\,\frac{1}{r^{n+1}} P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\{C\cos(\nu\varphi) + C'\sin(\nu\varphi)\}.$$

Darin kann man ohne weiteres $AB = 1$ setzen, da $A\,B\,C$ nur ebenso eine willkürliche Konstante bezeichnet wie C allein. Solcher Lösungen (10) von (1) gibt es unendlich viele, da für n eine beliebige positive ganze Zahl oder Null genommen werden kann, für ν jede positive ganze Zahl $\leqq n$. Da (1) eine lineare Differentialgleichung ist, so gibt die Summe mehrerer partikulärer Lösungen wieder eine Lösung. Die allgemeinste Lösung von (1), die alle charakteristischen Eigenschaften des Potentials besitzt, erhält man daher, wenn man für n und ν alle möglichen positiven ganzen Zahlen (nur $\nu \leqq n$) oder Null setzt und dann alle so erhaltenen partikulären Lösungen addiert. Bei der Summation kann man zuerst für ein festgehaltenes n nach ν summieren, nachher nach n, oder auch zuerst bei festgehaltenen ν nach n, nachher nach ν. Das gibt, wenn man die Konstanten C, C', die in jedem Summanden andere sein können, noch durch Indizes unterscheidet:

$$(11)\ W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{n} P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\{C_{n\nu}\cos(\nu\varphi) + C'_{n\nu}\sin(\nu\varphi)\}$$

oder

$$(11^1)\quad W = \sum_{\nu=0}^{\infty}\cos(\nu\varphi)\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{C_{n\nu}}{r^{n+1}}P_{n,\nu}(\cos\vartheta) + \sum_{\nu=0}^{\infty}\sin(\nu\varphi)\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{C'_{n\nu}}{r^{n+1}}P_{n,\nu}(\cos\vartheta).$$

Im folgenden soll stets die erste Art der Summation, d. h. die Formel (11) festgehalten werden. In dieser Formel ist die innere Summe nichts anderes als die allgemeine Kugelfunktion $X_n(\vartheta, \varphi)$. Wir sehen also, daß für den Raum außerhalb der Kugel R die einzige Lösung von (1), die allen Nebenbedingungen genügt,

$$(11\text{a})\qquad W_a = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}} X_n(\vartheta, \varphi)$$

ist.

b) Betrachten wir die Wirkung von Massen, die **außerhalb** der Kugel R oder auf ihrer Oberfläche liegen, auf Punkte innerhalb der Kugel, so gilt fast wörtlich dasselbe wie in a), nur daß hier $r=0$, nicht aber $=\infty$ werden kann. Damit W auch für $r=0$ endlich bleibt, muß hier in (5) α eine positive Zahl oder Null und $A=0$ sein. Daß α eine positive ganze Zahl $\geqq \nu$ oder Null sein muß, folgt, wie vorher, aus der Differentialgleichung für W_2. So ergibt sich für W der Wert

$$W_i = \sum_{n=0}^{\infty} r^n X_n(\vartheta, \varphi). \tag{12}$$

Zusatz. Die partikuläre Lösung $r^n X_n(\vartheta, \varphi)$ (die räumliche Kugelfunktion) ist die allgemeinste homogene ganze Funktion n-ter Ordnung der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z, die der Laplaceschen Gleichung genügt.

Denn $X_n(\vartheta, \varphi)$ ist eine ganze homogene Funktion n-ter Ordnung von $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta \cos\varphi$, $\sin\vartheta \sin\varphi$ (S. 74—75), $r^n X_n(\vartheta, \varphi)$ daher eine ebensolche Funktion von $r\cos\vartheta$, $r\sin\vartheta\cos\varphi$, $r\sin\vartheta\sin\varphi$, d. h. von den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z. Alle übrigen partikulären Lösungen der Laplaceschen Gleichung, die im Innenraum einer gegebenen Kugel endlich und stetig sind, sind homogene ganze Funktionen von höherer oder niedriger Ordnung. Mithin ist $r^n X_n(\vartheta, \varphi)$ die allgemeinste ganze homogene Funktion n-ter Ordnung von x, y, z, die der Laplaceschen Gleichung genügt.

c) Liegen die wirkenden Massen teils außerhalb oder auf der Kugel R, teils innerhalb oder auf der konzentrischen Kugel $R_0 (< R)$, während der Raum zwischen den Kugeln R und R_0 keine wirkenden Massen enthält, und wird für einen Punkt des letztgenannten Raumes, d. h. für

$$R_0 \leqq r \leqq R$$

das Potential der wirkenden Massen gesucht, so kann r weder $=0$, noch $=\infty$ werden. Hier bleibt der allgemeine Ausdruck (5) für alle in Betracht kommenden r endlich; nur muß α wieder eine ganze Zahl sein. In diesem Falle wird daher

$$(13)\qquad W = \sum_{n=0}^{\infty}\left[r^n X_n(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{r^{n+1}} X'_n(\vartheta,\varphi)\right],$$

wo X'_n ebenso wie X_n eine allgemeine Kugelfunktion n-ter Ordnung ist; nur haben in X'_n die Konstanten andere Werte als in X_n.

d) Um die in den Lösungen auftretenden Kugelfunktionen, deren jede ja willkürliche Konstante enthält, zu bestimmen, muß in den Fällen a) und b) der Wert von W an der Kugel R gegeben sein. Diesen gegebenen Wert $F(\vartheta,\varphi)$ entwickle man nach Kugelfunktionen

$$(14)\qquad W_{r=R} = \overline{W} = F(\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta,\varphi).$$

Aus (11a) folgt andererseits

$$(14^{\mathrm{I}})\qquad (W_a)_{r=R} = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}} X_n(\vartheta,\varphi).$$

mithin muß

$$X_n(\vartheta,\varphi) = R^{n+1}\, Y_n(\vartheta,\varphi)$$

und

$$(15)\qquad W_a = \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\vartheta,\varphi)$$

sein, während für denselben gegebenen Wert $\overline{W} = F(\vartheta,\varphi)$

$$(16)\qquad W_i = \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{n} Y_n(\vartheta,\varphi)$$

wird. Die Gleichung (15) enthält die Lösung der ersten Randwertaufgabe für das Gebiet außerhalb der Kugel R, Gleichung (16) die Lösung für das Innere der Kugel, d. h. die Lösung der Aufgabe, für das betreffende Gebiet eine Funktion zu bestimmen, die alle charakteristischen Eigenschaften des Potentials für Punkte außerhalb der wirkenden Masse besitzt, und die zugleich an der Grenze (am Rande) des Gebiets gegebene Werte (hier durch (14) gegeben) annimmt.

Zur Lösung der Randwertaufgabe für das zwischen den konzentrischen Kugeln R, R_0 liegende Gebiet müssen die Werte von W an den beiden Kugelflächen gegeben sein:

$$(14\text{a})\qquad \begin{cases} (W)_{r=R} = F(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \varphi), \\ (W)_{r=R_0} = \Psi(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\vartheta, \varphi). \end{cases}$$

Andererseits folgt aus (13):

$$(17)\qquad \begin{cases} (W)_{r=R} = \sum_0^{\infty}\left[R^n X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{R^{n+1}} X'_n(\vartheta, \varphi)\right], \\ (W)_{r=R_0} = \sum_0^{\infty}\left[R_0^n X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{R_0^{n+1}} X'_n(\vartheta, \varphi)\right]. \end{cases}$$

Da zwei Entwicklungen derselben Funktion nach Kugelfunktionen gliedweise übereinstimmen müssen, ist

$$R^n X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{R^{n+1}} X'_n(\vartheta, \varphi) = Y_n(\vartheta, \varphi),$$

$$R_0^n X_n(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{R_0^{n+1}} X'_n(\vartheta, \varphi) = Z_n(\vartheta, \varphi).$$

Setzt man die aus diesen Gleichungen folgenden Werte von X_n, X'_n in (13) ein, so erhält man als Lösung der ersten Randwertaufgabe für den vorliegenden Fall

$$(18)\qquad W = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{r^{2n+1} - R_0^{2n+1}}{R^{2n+1} - R_0^{2n+1}}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\vartheta, \varphi) + \frac{R^{2n+1} - r^{2n+1}}{R^{2n+1} - R_0^{2n+1}}\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+1} Z_n(\vartheta, \varphi)\right\}.$$

Zusammenfassend sehen wir, daß in den genannten drei Gebieten W dadurch völlig bestimmt ist, daß W der Laplaceschen Gleichung genügt, innerhalb des Gebietes

nebst allen Ableitungen endlich und stetig ist, im Unendlichen aber verschwindet, und daß endlich W an der oder den Grenzen des Gebiets gegebene Werte annimmt.

e) Die eben entwickelten allgemeinen Formeln sollen auf folgende spezielle Fälle angewandt werden.

α) Im Innern einer Kugel vom Radius R sei ein fester Punkt P (der Pol) gegeben; seine Polarkoordinaten seien $r_0, \vartheta_0, \varphi_0$. Ferner sei ϱ der Abstand eines beliebigen Punktes $A(r, \vartheta, \varphi)$, der im Innern oder auf der Kugel liegt, von P. Gesucht wird eine Funktion G, die für alle Punkte A die charakteristischen Eigenschaften des Potentials von Punkten außerhalb der wirkenden Masse besitzt, und die, wenn A in einen Punkt der Kugelfläche R fällt, wenn also $r = R$ wird, den Wert $\frac{1}{\varrho}$ annimmt.

$\frac{1}{\varrho}$ selbst besitzt die geforderten Eigenschaften nicht, da, wenn A in P fällt, $\frac{1}{\varrho}$ unendlich wird, während G für alle Punkte innerhalb der Kugel endlich sein soll. Bei der Bestimmung von G handelt es sich einfach um die Lösung der Randwertaufgabe für Innenpunkte. Nach (16) ist

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\vartheta, \varphi),$$

und die gegebenen Randwerte sind (14) $F(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{AP}$.

Es ist also

$$\sum_0^{\infty} Y_n(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos\gamma_0}} = \sum_0^{\infty} \frac{r_0^n}{R^{n+1}} P_n(\cos\gamma_0),$$

wo

$$\cos\gamma_0 = \cos\vartheta \cos\vartheta_0 + \sin\vartheta \sin\vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$$

ist, mithin

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = \frac{r_0^n}{R^{n+1}} P_n(\cos\gamma_0) \tag{19}$$

und weiter

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n r_0^n}{R^{2n+1}} P_n(\cos\gamma_0). \tag{20}$$

Dies Resultat zeigt, daß G sich nicht ändert, wenn man $r_0, \vartheta_0, \varphi_0$ mit r, ϑ, φ vertauscht, daß G also eine symmetrische Funktion der Koordinaten des Aufpunktes (r, ϑ, φ) und des Pols $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ ist.

Die Summation in (20) kann nach der Grundformel (1), S. 9 ausgeführt werden, wenn man den Faktor $\frac{1}{R}$ vor das Summenzeichen nimmt, so daß

$$(20\text{a})\quad G = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r\, r_0}{R^2}\right)^2 - 2\frac{r_0\, r}{R^2}\cos\gamma_0}} = \frac{\frac{R}{r_0}}{\sqrt{\frac{R^4}{r_0^2} + r^2 - \frac{2R^2}{r_0} r\cos\gamma_0}}$$

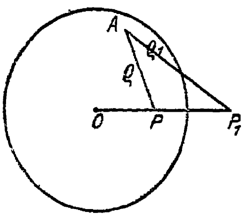

Fig. 5.

wird. Das Resultat läßt eine einfache geometrische Deutung zu. Sucht man auf dem Kugelradius OP denjenigen Punkt P_1, dessen Abstand vom Mittelpunkte O den Wert

$$r_1 = \frac{R^2}{r_0}$$

hat, so ist die Quadratwurzel auf der rechten Seite von (20a) der Abstand des Punktes $A(r, \vartheta, \varphi)$ von P_1, dem reziproken (oder auch konjugierten) Punkte von P. Bezeichnen wir AP_1 mit ϱ_1, so ist demnach

$$(20\text{b})\qquad G = \frac{R}{r_0\, \varrho_1}.$$

Daß G wirklich alle verlangten Eigenschaften hat, ist aus (20b) leicht zu erkennen. Dann $\frac{1}{\varrho_1}$ ist das Potential eines Massenpunktes außerhalb der Kugel, besitzt daher für alle Punkte A innerhalb der Kugel die charakteristischen Eigensehaften des Potentials und für $r = R$ wird $\varrho_1 = \frac{R}{r_0} \cdot \varrho$.

β) Die analoge Aufgabe für den Außenraum der Kugel R führt zu einer analogen Lösung. Liegt der

Pol $P(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ außerhalb der Kugel $R (r_0 > R)$ und sucht man für den Außenraum der Kugel die Funktion $G^{(a)}$, die die charakteristischen Eigenschaften des Potentials (von Punkten außerhalb der Masse) besitzt, und die für Punkte der Kugelfläche selbst $\frac{1}{\overline{PA}}$ wird, so ist diese

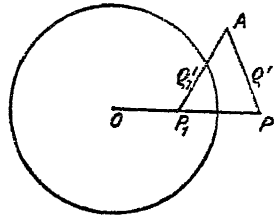

Fig 6.

$$(21) \qquad G^{(a)} = \frac{R}{r_0 \cdot \varrho'_1},$$

wo ϱ'_1 den Abstand des äußeren Punktes A von dem inneren Punkte P_1 bezeichnet, der mit P auf demselben Radius liegt, und dessen Abstand vom Mittelpunkte O

$$r_1 = \frac{R^2}{r_0}$$

ist.

γ) Die Bestimmung von G für den Raum zwischen den konzentrischen Kugeln R, R_0, wobei der Pol P ebenfalls zwischen diesen Kugeln liegt, also

$$R > r_0 > R_0$$

ist, ergibt sich aus (18), da G sowohl für $r = R$ als für $r = R_0$ gleich $\frac{1}{\overline{PA}}$ werden muß:

$$(22) \quad G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos\gamma_0)}{R^{2n+1} - R_0^{2n+1}} \left\{ \frac{r_0^n}{r^{n+1}} (r^{2n+1} - R_0^{2n+1}) + \frac{R_0^{2n+1}}{r_0^{n+1}\, r^{n+1}} (R^{2n+1} - r^{2n+1}) \right\}.$$

Zusatz. Kehren wir zu dem ersten Fall zurück, in dem der Pol P im Innenraum lag, und suchen für den Außenraum die Funktion W, die an der Kugelfläche R denselben Wert wie G annimmt, so ist sie $\frac{1}{\varrho_a}$, wo ϱ_a den

Abstand eines äußeren Punktes von dem im Innern gelegenen Pol P bezeichnet. Denn $\frac{1}{\varrho_a}$ genügt allen Bedingungen, denen W zu genügen hat, und W ist durch diese Bedingungen und die Randwerte eindeutig bestimmt.

Eine Funktion, die innerhalb der Kugel R den durch (20b) bestimmten Wert G, außerhalb den Wert $\frac{1}{\varrho_a}$ hat, besitzt alle charakteristischen Eigenschaften des Flächenpotentials. Um diese Potentialwerte zu erhalten, muß man die Kugel mit Masse von der Dichtigkeit

$$\varkappa = -\frac{1}{4\pi}\lim_{r=R}\left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho_a}}{\partial r} - \frac{\partial G}{\partial r}\right) \tag{23}$$

belegen Die Gesamtmasse der Kugelfläche ist dabei $=1$.

Die Ausführung der Rechnung ergibt, wenn man für G die Reihe (20) nimmt, aus der ja (20b) abgeleitet ist, ferner für

$$1 : \varrho_a = 1 : \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2\, r\, r_0 \cos\gamma_0}$$

die Reihe, die aus der Entwicklung nach Kugelfunktionen für $r_0 < r$ folgt,

$$\varkappa = \frac{1}{4\pi}\sum_0^\infty \frac{(2n+1)\, r_0^n}{R^{n+2}} P_n(\cos\gamma_0) \tag{23a}$$

oder, wenn man die Summation mittels der S. 103 abgeleiteten Hilfsformel ausführt,

$$\varkappa = \frac{R^2 - r_0^2}{4\pi R\sqrt{(R^2 + r_0^2 - 2\, R\, r_0\cos\gamma_0)^3}}. \tag{23b}$$

Die Funktion

$$\mathfrak{G} = G - \frac{1}{\varrho}, \tag{24}$$

in der ϱ den Abstand eines inneren Punktes von dem ebenfalls im Innern gelegenen Pol bezeichnet, G den Ausdruck (20b), heißt die Greensche Funktion für den Innenraum der Kugel. Sie hat für alle inneren Punkte die

charakteristischen Eigenschaften des Potentials, außer im Pol P, wo sie unendlich wird, und sie verschwindet für Punkte der Kugelfläche selbst. $\mathfrak{G}$ ändert seinen Wert nicht, wenn man r, ϑ, φ und $r_0, \vartheta_0, \varphi_0$ miteinander vertauscht. Die durch (23) oder (23b) bestimmte Dichtigkeit $\varkappa$ heißt die Dichtigkeit der Greenschen Belegung. — Analog ist die Greensche Funktion für den Außenraum der Kugel

$$\mathfrak{G}^{(a)} = G^{(a)} - \frac{1}{\varrho'}, \tag{25}$$

wo $G^{(a)}$ den Ausdruck (21), ϱ' den Abstand eines beliebigen äußeren Punktes von dem Pol $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$, $[r_0 > R]$, bezeichnet.

Kapitel 4.

Die zweite Randwertaufgabe für die Kugel.

Zur Bestimmung der in den allgemeinen Gleichungen (11a), (12) und (13) des vorigen Kapitels auftretenden Kugelfunktionen können statt der Werte, die W an den begrenzenden Kugelflächen annimmt, auch die Werte gegeben sein, die der Differentialquotient von W nach der Normale an jenen Kugelflächen annimmt. Die Ermittelung von W aus dieser Bedingung nennt man die zweite Randwertaufgabe. Bei ihrer Lösung ergibt sich zwischen dem Außen- und Innenraum ein Unterschied.

a) Außenraum. Es wird eine Funktion W gesucht, die in dem Raume außerhalb der Kugel R der Laplaceschen Gleichung und allen Stetigkeitsbedingungen des Potentials genügt, und deren Ableitung nach der äußeren Normale des Raumes an der Kugel R gleich einer gegebenen Funktion $F(\vartheta, \varphi)$ ist.

Nach Gleichung (11a) des vorigen Kapitels hat W die Form

$$W_a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} X_n(\vartheta, \varphi), \tag{1}$$

daher

$$-\frac{\partial W_a}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{r^{n+2}} X_n(\vartheta, \varphi). \tag{1a}$$

Nun hat an der Kugel R die äußere Normale des betrachteten Gebiets die Richtung der abnehmenden r. Die Ableitung von W nach der äußeren Normale des Gebiets ist also an der Kugelfläche R

$$\text{(1b)} \qquad -\left(\frac{\partial W_a}{\partial r}\right)_{r=R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{R^{n+2}} X_n(\vartheta, \varphi).$$

Die Ableitung soll den Wert $F(\vartheta, \varphi)$ haben, der, nach Kugelfunktionen entwickelt,

$$\text{(2)} \qquad F(\vartheta, \varphi) = \sum_{0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \varphi)$$

sei. Dann muß

$$X_n(\vartheta, \varphi) = \frac{R^{n+2}}{n+1} Y_n(\vartheta, \varphi)$$

sein, und als Resultat ergibt sich

$$\text{(3)} \qquad W_a = R \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\vartheta, \varphi).$$

b) Innenraum. Hier muß man, wenn F eine beliebig gegebene Funktion sein soll, die Randbedingung dahin modifizieren, daß die Ableitung von W nach der äußeren Normale des Gebiets (die hier die Richtung der zunehmenden r hat) sich an der Kugel R von einer gegebenen Funktion $F(\vartheta, \varphi)$ um eine (noch zu bestimmende) Konstante C unterscheidet. Nach Gleichung (12) des vorigen Kapitels hat hier W die Form

$$\text{(4)} \qquad W_i = \sum_{n=0}^{\infty} r^n X_n(\vartheta, \varphi),$$

daher

$$\text{(4a)} \qquad \left(\frac{\partial W_i}{\partial r}\right)_{r=R} = \sum_{n=1}^{\infty} n R^{n-1} X_n(\vartheta, \varphi)$$

(denn das Glied für $n = 0$ verschwindet beim Differentiieren). Ist auch hier $F(\vartheta, \varphi)$, nach Kugelfunktionen ent-

wickelt, durch die Reihe (2) dargestellt, so ist die Randbedingung

$$\left(\frac{\partial W_i}{\partial r}\right)_{r=R} = C + \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \varphi). \tag{5}$$

Aus (4a) und (5) folgt für $n > 0$

$$X_n(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{n R^{n-1}} Y_n(\vartheta, \varphi) \qquad (n > 0), \tag{6}$$

während für $n = 0$

$$0 = C + Y_0(\vartheta, \varphi) \tag{6a}$$

wird. Damit ist C bestimmt. Dagegen ergibt sich für das konstante Glied X_0 von (4) überhaupt keine Bedingung, X_0 bleibt völlig willkürlich. Mithin wird hier

$$W_i = X_0 + R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\vartheta, \varphi). \tag{7}$$

Ebenso läßt sich die zweite Randwertaufgabe für den von zwei konzentrischen Kugeln begrenzten Raum behandeln. Hier ist die Randbedingung an einer der beiden Kugeln die gleiche wie b), an der andern die gleiche wie in a).

c) Drückt man die Kugelfunktionen durch die gegebene Funktion $F(\vartheta, \varphi)$ selbst aus:

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F(\vartheta_1, \varphi_1) P_n(\cos\gamma) \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1, \tag{8}$$

so wird

$$W_a = \tag{9}$$

$$\frac{R}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F(\vartheta_1, \varphi_1) \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\gamma),$$

$$W_i = X_0 + \tag{10}$$

$$\frac{R}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F(\vartheta_1, \varphi_1) \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\gamma).$$

Die hier auftretenden Summationen lassen sich ausführen. Wenn man nämlich die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\,\alpha\cos\gamma+\alpha^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(\cos\gamma) \qquad (\alpha<1)$$

nach α integriert und die Integrationskonstante so bestimmt, daß das Integral für $\alpha=0$ verschwindet, so erhält man

$$(11)\quad \int_0^\alpha \frac{d\,\alpha}{\sqrt{1-2\,\alpha\cos\gamma+\alpha^2}}=\log\left(\frac{\alpha-\cos\gamma+\sqrt{1-2\,\alpha\cos\gamma+\alpha^2}}{1-\cos\gamma}\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n+1}}{n+1}P_n(\cos\gamma)$$

und

$$(11\text{a})\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\,n+1}{n+1}\,\alpha^{n+1}P_n(\cos\gamma)=\frac{2\,\alpha}{\sqrt{1-2\,\alpha\cos\gamma+\alpha^2}}$$
$$-\log\left(\frac{\alpha-\cos\gamma+\sqrt{1-2\,\alpha\cos\gamma+\alpha^2}}{1-\cos\gamma}\right).$$

Zur Ausführung der Summation in (10) gebraucht man die Hilfsformel

$$(12)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,n+1}{n}\,\alpha^n P_n(\cos\gamma)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1-2\,\alpha\cos\gamma+\alpha^2}}-2+\int_0^\alpha\frac{d\,\alpha}{\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{1-2\,\alpha\cos\gamma+\alpha^2}}-1\right]$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1-2\,\alpha\cos\gamma+\alpha^2}}-2+\log\left(\frac{2}{1-\alpha\cos\gamma+\sqrt{1-2\,\alpha\cos\gamma+\alpha^2}}\right)$$

Durch Anwendung von (11a) auf (9) und von (12) auf (10) ergeben sich für W_a und W_i Integraldarstellungen in geschlossener Form, die den Poissonschen Integralen bei der ersten Randwertaufgabe [Gl. (11) und (11a), S. 103] analog sind.

d) Es sollen die allgemeinen Formeln auf folgende spezielle Fälle angewandt werden.

α) Es sei W für den Außenraum der Kugel R zu bestimmen, während

$$F(\vartheta,\varphi) = -\left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial r}\right)_{r=R},$$

ist, wo ϱ den Abstand eines beliebigen Punktes von einem festen, außerhalb der Kugel gelegenen Punkte P (dem Pol) bezeichnet; und es soll W in diesem Falle mit $\overline{G}^{(a)}$ bezeichnet werden.

Hier ist, wenn r_0 den Abstand des Poles vom Mittelpunkt bezeichnet, $\cos\gamma_0$ denselben Wert wie S. 119 hat,

$$\begin{aligned}
\sum_0^\infty Y_n(\vartheta,\varphi) &= -\left(\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2-2\,r\,r_0\cos\gamma_0}}}{\partial r}\right)_{r=R} \\
&= -\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{R^2+r_0^2-2\,R\,r_0\cos\gamma_0}}}{\partial R} \\
&= -\frac{\partial}{\partial R}\left[\sum_0^\infty \frac{R^n}{r_0^{n+1}} P_n(\cos\gamma_0)\right] \\
&= -\sum_0^\infty \frac{n\,R^{n-1}}{r_0^{n+1}} P_n(\cos\gamma_0),
\end{aligned}$$

somit

$$Y_n(\vartheta,\varphi) = -\frac{n\,R^{n-1}}{r_0^{n+1}} P_n(\cos\gamma_0),\ Y_0 = 0,$$

und

$$\overline{G}^{(a)} = -\sum^\infty \frac{n}{n+1}\,\frac{R^{2n+1}}{r^{n+1}\,r_0^{n+1}} P_n(\cos\gamma_0). \tag{13}$$

Mittels der Hilfsgleichung (11) ergibt sich aus (13) für $\overline{G}^{(a)}$ die endliche Form

$$3a)\quad \overline{G}^{(a)} = \frac{-R}{\sqrt{R^4 + r_0^2 r^2 - 2R^2 r_0 r \cos\gamma_0}}$$
$$+\frac{1}{R}\log\left[\frac{R^2 - r_0 r\cos\gamma_0 + \sqrt{R^4 + r_0^2 r^2 - 2R^2 r_0 r\cos\gamma_0}}{r_0 r(1-\cos\gamma_0)}\right.$$

(Das Argument des Logarithmus bleibt auch für $\cos\gamma_0 = 1$ endlich)

Bezeichnet ϱ' den Abstand eines beliebigen äußeren Punktes (r, ϑ, φ) von dem ebenfalls außerhalb gelegenen Pole $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$, so nennt man die Funktion

$$(14)\qquad \overline{\mathfrak{G}}^{(a)} = \overline{G}^{(a)} - \frac{1}{\varrho'}$$

die zweite Greensche Funktion für den Außenraum der Kugel. Sie hat für alle äußeren Punkte die Eigenschaften des Potentials mit Ausnahme des Pols, in dem sie unendlich wird. An der Kugel selbst ist ihre normale Ableitung $= 0$.

β) Sucht man entsprechend für den Innenraum der Kugel die Funktion W_i, für die

$$F(\vartheta, \varphi) = \left[\frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\gamma_0}}\right)}{\partial r}\right]_{r=R} + C$$

ist, wo $r_0, \vartheta_0, \varphi$ $(r_0 < R)$ die Polarkoordinaten des Poles sind, und bezeichnet diese spezielle Funktion mit $\overline{G}^{(i)}$, so ergibt sich

$$(15)\quad \overline{G}^{(i)} = X_0 + \frac{1}{R} - \frac{R}{\sqrt{R^4 + r^2 r_0^2 - 2R^2 r r_0\cos\gamma_0}}$$
$$+\frac{1}{R}\log\frac{R^2 - r r_0\cos\gamma_0 + \sqrt{R^4 + r^2 r_0^2 - 2R^2 r r_0\cos\gamma_0}}{2R^2},$$

worin X_0 eine willkürliche Konstante bezeichnet, während die obige Konstante C den Wert $\frac{1}{R^2}$ hat. Die zweite

Greensche Funktion für den Innenraum der Kugel ist dann

$$\overline{\mathfrak{G}}^{(i)} = \overline{G}^{(i)} - \frac{1}{\varrho}, \tag{16}$$

wo ϱ den Abstand eines beliebigen inneren Punktes von dem (ebenfalls im Inneren gelegenen) Pol ist.

Kapitel 5.

Die Elektrizitätsverteilung auf einer leitenden Kugel oder Kugelschale.

a) Grundlage der Untersuchung.

Die Theorie der elektrischen Verteilung, deren Grundzüge zuerst von Poisson 1811 entwickelt sind [Bd. XII der Mémoires der Pariser Akademie], geht von der Vorstellung aus, daß es zwei elektrische Fluida gibt. Gleichartige elektrische Massen stoßen einander ab, ungleichartige ziehen sich an. Anziehung wie Abstoßung erfolgen für punktförmige Massen umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung und direkt proportional den wirkenden Massen (Coulombsches Gesetz). Beide Wirkungen, Anziehung und Abstoßung, kann man durch dieselbe Formel darstellen, wenn man die Massen nicht absolut nimmt, sondern den Massen der einen Art (und damit ihrer Dichtigkeit) das positive, denen der andern Art das negative Vorzeichen gibt. Die Wirkung, welche die punktförmige Masse m von der punktförmigen Masse μ erfährt, hat die x-Komponente

$$X = -\frac{f m \mu (\xi - x)}{\varrho^3}, \tag{1}$$

wenn ξ, η, ζ die Koordinaten von μ, x, y, z die von m sind, ϱ die Entfernung beider Massen, f ein von dem Maß der Kraft abhängiger Faktor. Haben m und μ gleiche Vorzeichen, so stellt (1) die x-Komponente einer abstoßenden, bei ungleichen Zeichen von m und μ die x-Komponente einer anziehenden Kraft dar. Wie in Bd. I (Abschnitt I,

Kap. 3) kann man die drei Kraftkomponenten durch das Potential V darstellen, und zwar ist hier

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad V = \frac{f m \mu}{\varrho}. \tag{2}$$

Ferner kann man von punktförmigen Massen ganz wie im Abschnitt I (Kap. 1 und 3) zu Massen übergehen, die im Raume oder auf Flächen verteilt sind.

In bezug auf das elektrische Verhalten verschiedener Körper unterscheidet man Leiter und Nichtleiter. Die ersteren pflanzen den elektrischen Zustand sehr schnell und mit großer Leichtigkeit fort, die Nichtleiter gestatten diese Fortpflanzung nur in geringem Grade. Die Untersuchung der Elektrizitätsverteilung bezieht sich nur auf Leiter, die isoliert aufgestellt oder mit der Erde leitend verbunden sind. Weiter nimmt man an, daß im natürlichen (unelektrischen) Zustande die beiden elektrischen Fluida sich so durchdringen, daß in jedem Massenelement des Leiters gleichviel positive und negative Elektrizität vorhanden ist, und zwar in jedem Element in unbegrenzter Menge. Beide Fluida neutralisieren einander dann derart, daß ein solcher Körper keine elektrische Wirkung ausübt. Dieser neutrale Zustand wird aufgehoben: 1. durch Mitteilung freier Elektrizität. Wird dem neutralen Körper ein Überschuß der einen Elektrizität mitgeteilt, so wirkt diese auf jedes Volumenelement dv des Leiters. Die der mitgeteilten gleichartige Elektrizität von dv wird abgestoßen, die ungleichartige angezogen. Die mitgeteilte Elektrizität übt also eine Scheidekraft auf die neutrale Elektrizität aus; die dadurch entstandene freie Elektrizität kann sich auf dem Leiter ohne Widerstand verbreiten, und diese Wirkung dauert an, bis nach sehr kurzer Zeit die mitgeteilte Ladung und die freigewordenen elektrischen Massen sich so verteilt haben, daß auf kein Volumenelement dv des Leiters eine anziehende oder abstoßende Wirkung ausgeübt wird, bis also elektrisches Gleichgewicht eingetreten ist. 2. Ohne daß dem Leiter freie Elektrizität mitgeteilt ist, wird eine Scheidekraft auf die in dem Element dv vorhandene neutrale Elektrizität auch schon ausgeübt, wenn dem unelektrischen Leiter eine elektrische Masse (ein elektrischer Körper) genähert wird. Man bezeichnet diese

Art von Entstehung der Elektrizität als Influenz. Durch Influenz entsteht stets gleichviel positive und negative Elektrizität, da vor und nach der Influenz jedes Volumenelement nur neutrale Elektrizität, d. h. gleichviel positive und negative besaß. 3. Es kann dem Leiter freie Elektrizität mitgeteilt sein und außerdem eine äußere elektrische Masse influenzierend auf ihn wirken. In allen Fällen soll untersucht werden, wie sich die dem Leiter mitgeteilte oder die in ihm durch Influenz entstandene Elektrizität nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichts verteilt. Der Leiter kann entweder isoliert aufgestellt oder mit der Erde leitend verbunden sein.

Die Aufgabe läßt sich dahin erweitern, daß mehrere voneinander isolierte Leiter gegeben sind, denen beliebige elektrische Ladungen mitgeteilt sind, und auf welche außerdem gegebene äußere elektrische Kräfte wirken. Zu untersuchen ist, wie sich bei der hier neu hinzukommenden gegenseitigen Einwirkung der Leiter aufeinander die Elektrizität auf den einzelnen verteilt.

Aus den vorstehenden Grundvorstellungen ergibt sich nun folgende allgemeine Eigenschaft der Anordnung der Elektrizität auf Leitern: Alle freie Elektrizität kann sich nur auf der Oberfläche der Leiter befinden, nicht in ihrem Innern. Denn im Gleichgewichtszustande muß die Verteilung der Elektrizität eine solche sein, daß für alle Punkte A im Innern eines Leiters die Wirkungen aller vorhandenen Anziehungen und Abstoßungen sich aufheben; sonst würde eine weitere Scheidung der neutralen Elektrizität stattfinden, es wäre also kein elektrisches Gleichgewicht vorhanden. Es müssen also in jedem inneren Punkte A die Komponenten X, Y, Z der gesamten wirkenden Kraft verschwinden. Da dies für alle inneren Punkte stattfinden muß, müssen auch die Ableitungen von X, Y, Z nach den Koordinaten von A verschwinden, insbesondere muß daher

$$(3) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

sein, da schon die einzelnen Summanden verschwinden.

Da nach (2) $X = -\frac{\partial V}{\partial x}$, so ist $\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ usw., so daß Gleichung (3) lautet:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{3a}$$

Daraus folgt, daß in dem bei A liegenden Volumenelement keine freie Elektrizität vorhanden sein kann; denn wäre solche vorhanden, würde also A innerhalb der wirkenden Masse liegen, so würde nicht die Laplacesche Gleichung gelten, sondern die Poissonsche

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi k$$

(f und $m = 1$ genommen); d. h. es würde die Bedingung des elektrischen Gleichgewichtes dort nicht erfüllt sein. Diese Bedingung erfordert mithin, daß überall im Innern des Leiters $k = 0$, d. h. daß wirkende Masse nur auf der Oberfläche des Leiters verteilt ist.

Ist nun eine beliebige Anzahl von isoliert aufgestellten Leitern gegeben, so muß sich nach dem Gesagten die Elektrizität auf den Oberflächen der einzelnen so verteilen, daß die Summe der Potentiale, die von diesen Oberflächenbelegungen und von den etwa außerdem auf die einzelnen Körper wirkenden (gegebenen) elektrischen Kräften herrühren, im Innern eines jeden einzelnen Leiters konstant ist. Der konstante Wert der Potentialsumme kann in jedem Körper ein anderer sein. Aus diesen Bedingungen die Art der elektrischen Verteilung zu bestimmen, ist die Aufgabe der Elektrostatik.

Für einige einfache Fälle erhält man die Lösung der Aufgabe unmittelbar aus bekannten Sätzen der Potentialtheorie.

Wird einer isoliert aufgestellten leitenden Kugel eine elektrische Ladung mitgeteilt, ohne daß sonstige elektrische Kräfte auf die Kugel wirken, so verteilt sich die Ladung auf der Kugelfläche mit gleichförmiger Dichtigkeit. Denn nach dem Satze Bd. I, S. 23 übt eine derartig geladene Kugel auf einen im Innern gelegenen Massenpunkt keine Wirkung aus.

Die Dichtigkeit, mit der sich eine elektrische Ladung auf einem leitenden, isoliert aufgestellten Ellipsoid verteilt, auf das keine äußeren Kräfte wirken, ergibt sich aus Bd. I, S. 234 [Formel (30)], da bei dieser Dichtigkeit der Oberflächenbelegung das Potential für innere Punkte einen konstanten Wert besitzt.

Zusatz. Sind nicht alle Leiter isoliert aufgestellt, sondern ist einer derselben L mit der Erde leitend verbunden, so bilden L und die Erde zusammen einen einzigen leitenden Körper. Im Falle des elektrischen Gleichgewichts muß die Summe der Potentiale aller wirkenden Kräfte innerhalb des ganzen Leiters konstant sein, d. h. die Summe muß innerhalb L denselben Wert haben wie innerhalb der Erde. Nun lehrt die Erfahrung, daß durch die leitende Verbindung von L mit der Erde der elektrische Zustand der letzteren nicht geändert wird. War die Erde vorher unelektrisch, so ist sie es auch nachher. Das Potential eines völlig unelektrischen Leiters aber ist, da an seiner Oberfläche keine Elektrizität vorhanden oder, was dasselbe, da die Dichtigkeit der Elektrizität überall $=0$ ist, ebenfalls $=0$. Ist die Erde dauernd unelektrisch, dauernd im natürlichen Zustande (was allerdings nicht ganz streng, aber mit großer Annäherung zutrifft), so ist ihr Potential stets gleich Null. Hiernach muß also auch die konstante Summe der Potentiale aller wirkenden elektrischen Massen innerhalb eines zur Erde abgeleiteten Leiters den Wert Null haben.

b) Elektrizitätsverteilung auf einer leitenden Kugel.

I. Einer isoliert aufgestellten leitenden Vollkugel vom Radius R sei ein gewisses Quantum M freier Elektrizität mitgeteilt, und außerdem möge die Kugel unter der Wirkung gegebener elektrischer Kräfte stehen, die außerhalb der Kugel ihren Sitz haben. Wie verteilt sich die mitgeteilte freie, resp. die durch Influenz entstehende Elektrizität auf der Kugeloberfläche?

Das Potential der gegebenen elektrischen Kräfte hat, da sie von Massen außerhalb der Kugel, deren Radius R sei, herrühren, nach Gleichung (16), S. 117 die Form:

(4) $$U = \sum_0^\infty \left(\frac{r}{R}\right)^n Z_n(\vartheta, \varphi),$$

und darin sind alle Kugelfunktionen Z gegeben. Ferner sei die unbekannte Dichtigkeit, mit der sich die freie Elektrizität auf der Kugel verteilt,

(5) $$\varkappa = \sum_0^\infty K_n(\vartheta_1, \varphi_1).$$

Das Potential dieser Oberflächenschicht ist nach Gleichung (4b), S. 98 für innere Punkte

(6) $$V = 4\pi \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2n+1} \frac{r^n}{R^{n-1}} K_n(\vartheta, \varphi).$$

Das Potential der Gesamtwirkung, die auf einen Punkt im Innern der Kugel ausgeübt wird, muß konstant sein, d. h.

(7) $$U + V = C.$$

In $U+V$ müssen daher die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von r, mit Ausnahme des Koeffizienten von r^0, verschwinden, d. h. es muß

(8) $$\frac{4\pi R}{2n+1} K_n(\vartheta, \varphi) + Z_n(\vartheta, \varphi) = 0 \qquad (n > 0)$$

sein, während für $n = 0$

(8a) $$4\pi R K_0 + Z_0 = C$$

ist. Durch (8) sind alle K_n bestimmt außer K_0, das unbestimmt bleibt, da über den Wert von C im voraus nichts bekannt ist. Aber nach (5b), S. 99 ist

(9) $$\frac{M}{R} = 4\pi R K_0,$$

da M die Masse der der Kugel mitgeteilten Elektrizität ist. Denn diese Masse ist bei der isoliert aufgestellten Kugel unveränderlich, weil durch Influenz gleichviel positive und negative Elektrizität entsteht, mithin die Gesamtmasse der allein durch Influenz entstehenden Elektrizität

$= 0$ ist. Nach alledem ergibt sich für die gesuchte Dichtigkeit das Resultat:

$$(10) \qquad \varkappa = \frac{M}{4\pi R^2} - \frac{1}{4\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\,Z_n(\vartheta_1, \varphi_1).$$

Die Dichtigkeit $\varkappa$, die von Z_0 unabhängig ist, besteht aus zwei Teilen, $\varkappa = \varkappa' + \varkappa''$. Der erste Teil $\varkappa' = M : 4\pi R^2$ würde sich ergeben, wenn alle Z für $n > 0$ verschwinden würden, d. h. wenn keine äußeren Kräfte auf die Kugel einwirkten. Denn da Z_0 von ϑ, φ unabhängig ist, würden, auch wenn Z_0 nicht $= 0$ wäre, die drei Komponenten $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ sämtlich $= 0$ werden. Der zweite Teil $\varkappa''$ von $\varkappa$ würde sich für $M = 0$ ergeben; dieser Teil rührt somit nur von der influenzierenden Wirkung der äußeren Kräfte her. $\varkappa$ selbst entsteht durch Superposition der beiden Schichten, deren eine ohne Einwirkung äußerer Kräfte, deren andere ohne Mitteilung freier Elektrizität entstehen würde.

Bemerkung 1. Das Resultat hätte sich auch ergeben, wenn nur gefordert wäre, daß $U + V$ an der ganzen Oberfläche der Kugel einen konstanten Wert hat (vgl. S. 112, Zusatz 2).

Bemerkung 2. Statt der obigen hätte auch folgende andere Argumentation zum Ziele geführt. Das Potential der Oberflächenschicht, deren Dichtigkeit zu bestimmen ist, ist nach (7) für innere Punkte

$$(\alpha) \qquad V_i = C - U = C - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n Z_n(\vartheta, \varphi),$$

daher für Punkte der Kugelfläche

$$(\beta) \qquad \overline{V} = C - \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\vartheta, \varphi).$$

Aus dem Werte an der Oberfläche aber folgt der Wert von V für äußere Punkte aus Gleichung (15), S. 117; er ist

$$(\gamma) \qquad V_a = (C - Z_0)\frac{R}{r} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Z_n(\vartheta, \varphi).$$

Da nun V_i und V_a durch eine Flächenbelegung der Kugel mit Masse von der Dichtigkeit $\varkappa$ entstehen, so ist wegen der allgemeinen Eigenschaften des Flächenpotentials

$$(\delta) \qquad \lim_{r=R}\left(\frac{\partial V_a}{\partial r}-\frac{\partial V_i}{\partial r}\right)=-4\pi\varkappa.$$

Die Ausführung der Rechnung ergibt ebenfalls die Gleichung (10), wenn man noch beachtet, das $\lim_{r=\infty}(r V_a)=M$, d.h. $(C-Z_0)R=M$ ist.

II. Die Aufgabe I werde dahin modifiziert, daß die Kugel nicht isoliert aufgestellt, sondern mit der Erde leitend verbunden ist.

In diesem Falle ist nach S 133, Zusatz, $C=0$ zu setzen. Daher tritt an Stelle der Gleichung (8a) die andere

$$(8\text{b}) \qquad 4\pi R K_0+Z_0=0.$$

Im übrigen bleiben die Resultate ungeändert, so daß jetzt die Dichtigkeit der freien Elektrizität

$$(10\text{a}) \qquad \varkappa=-\frac{1}{4\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Z_n(\vartheta_1,\varphi_1)$$

wird. Die Gesamtmasse der auf der Kugeloberfläche verteilten Elektrizität ist hier

$$(11) \qquad M'=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varkappa R^2\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1\,d\varphi_1=-Z_0 R,$$

gleichgültig, welche Menge M freier Elektrizität der Kugel mitgeteilt ist.

Anwendung. Elektrizitätsverteilung auf einer leitenden Kugel unter Einwirkung eines äußeren elektrischen Massenpunktes.

Die elektrischen Kräfte, die auf die Kugel einwirken, mögen herrühren von einem elektrischen Massenpunkt A, dessen Masse $=\mu$, und dessen Abstand vom Mittelpunkte O der Kugel $=c$ ist. Wird die Linie OA zur Achse der

räumlichen Polarkoordinaten genommen, so ist das Potential der gegebenen äußeren Kräfte

$$(12)\qquad U = \frac{\mu}{\sqrt{r^2 + c^2 - 2\,r\,c\cos\vartheta}}.$$

Für Punkte innerhalb der Kugel ist $r < R$, dagegen ist $c > R$, also $r < c$. Entwickelt man U nach Kugelfunktionen, so ist für Punkte im Innern der Kugel

$$(12^{\mathrm{I}})\qquad U = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{c^{n+1}} P_n(\cos\vartheta),$$

d. h. hier ist

$$(13)\qquad Z_n(\vartheta, \varphi) = \frac{\mu R^n}{c^{n+1}} P_n(\cos\vartheta).$$

Daher wird nach (10), wenn die Kugel isoliert aufgestellt und ihr die Masse M freier Elektrizität mitgeteilt ist, die Dichtigkeit der elektrischen Oberflächenschicht

$$(14)\qquad \varkappa = \frac{M}{4\pi R^2} - \frac{\mu}{4\pi R c}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{R}{c}\right)^n P_n(\cos\vartheta_1).$$

Da

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{R}{c}\right)^n P_n(\cos\vartheta_1) = -1 + \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{R}{c}\right)^n P_n(\cos\vartheta_1)$$

ist, so läßt sich die Summation in (14) ausführen [vgl. die Formel (10b), S. 103] und ergibt

$$(15)\qquad \varkappa = \frac{M}{4\pi R^2} + \frac{\mu}{4\pi R c}\left\{1 - \frac{c(c^2 - R^2)}{\sqrt{(c^2 + R^2 - 2cR\cos\vartheta_1)^3}}\right\}.$$

Um die Wirkung des influenzierenden Massenpunktes zu erkennen, nehmen wir in (15) $M = 0$, d. h. wir betrachten den Fall, daß der Kugel keine freie Elektrizität mitgeteilt ist. Dann ist die die Dichtigkeit

$$(15^{\mathrm{I}})\qquad \varkappa'' = \frac{\mu}{4\pi R c}\left\{1 - \frac{c(c^2 - R^2)}{\sqrt{(c^2 + R^2 - 2cR\cos\vartheta_1)^3}}\right\} = \frac{\mu}{4\pi R c}\left\{1 - \frac{c t^2}{\varrho^3}\right\},$$

wo ϱ den Abstand eines beliebigen Punktes P der Kugelfläche von dem Punkte A bezeichnet, $t = AT$ die Länge der von A an die Kugel gelegten Tangenten, während, wie schon angegeben, $c = OA$ ist. Aus (15[I]) folgt:

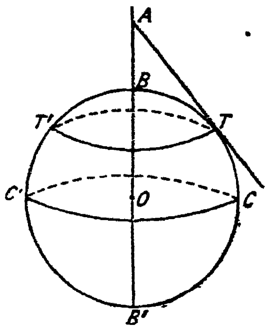

Fig. 7.

für $\vartheta_1 = 0$, d. i. im Punkte B,

$$\text{ist } \varkappa'' = \frac{\mu}{4\pi Rc}\left\{1 - \frac{c(c+R)}{(c-R)^2}\right\},$$

für $\vartheta_1 = \pi$, d. i. im Punkte B',

$$\text{ist } \varkappa'' = \frac{\mu}{4\pi Rc}\left\{1 - \frac{c(c-R)}{(c+R)^2}\right\},$$

für $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$, d. i. in einem Punkte C des größten Kugelkreises, der auf BB' senkrecht steht, ist $\varkappa'' = \frac{\mu}{4\pi Rc}\left\{1 - \frac{c(c^2-R^2)}{\sqrt{(c^2+R^2)^3}}\right\}$,

für $\cos\vartheta_1 = \frac{R}{c}$, d. h. in einem Punkte T des Berührungskreises des von A an die Kugel gelegten Tangentialkegels, ist

$$\varkappa'' = \frac{\mu}{4\pi Rc}\left\{1 - \frac{c}{\sqrt{c^2-R^2}}\right\}.$$

In B und T hat $\varkappa''$ das entgegengesetzte Vorzeichen von μ, in C und B' das gleiche; d. h. auf der A zugewandten Seite der Kugel sammelt sich von der durch Influenz entstehenden Elektrizität die zu μ ungleichartige, auf der abgewandten Seite die zu μ gleichartige Elektrizität. Für die Grenze beider, die durch einen zwischen den Kreisen TT' und CC' liegenden Parallelkreis zu beiden gebildet wird, gilt die Gleichung

$$(16) \qquad \bar\varrho = c^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} \text{ oder } \cos\bar\vartheta_1 = \frac{c^2 + R^2 - c^{\frac{2}{3}}(c^2-R^2)^{\frac{2}{3}}}{2cR}.$$

Die Gesamtmasse der durch die Influenz entstehenden gleichartigen Elektrizität ist

$$(17) \qquad M_1 = \int_{\bar\vartheta_1}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} \varkappa'' R^2 \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1,$$

d. i. nach Ausführung der Integration

$$M_1 = \frac{\mu}{4\,c^2}[3\,(c^2-\bar{\varrho}^2)+R^2]\,. \tag{17a}$$

Das Potential der auf der Kugel allein durch Influenz entstehenden Elektrizität ist nach (4b) resp. (4a), S. 98

für innere Punkte (18) $V_i = -\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{c^{n+1}} P_n(\cos\vartheta) = \frac{\mu}{c} - U,$

für äußere Punkte (18I) $V_a = -\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{2n+1}}{c^{n+1}\,r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta)$

$$= \frac{\mu\cdot\frac{R}{c}}{r} - \frac{\mu\cdot\frac{R}{c}}{\sqrt{r^2+\frac{R^4}{c^2}-2r\frac{R^2}{c}\cos\vartheta}}.$$

Die Wurzel in V_a ist der Abstand des Punktes (r, ϑ, φ) von dem Punkte A_1, der mit A auf demselben Radius liegt, und dessen Abstand von $O = \frac{R^2}{c}$ ist. V_a ist daher die Summe der Potentiale zweier Massenpunkte, d. h. die durch Influenz auf der Kugel entstehende Elektrizität wirkt auf Punkte außerhalb der Kugel so wie zwei Massenpunkte, deren einer in O, deren anderer in A_1 liegt, und zwar ist die Masse des ersteren $\mu\frac{R}{c}$, die des zweiten $-\mu\frac{R}{c}$. — Der konstante Wert von $U+V$ für innere Punkte ist $\frac{\mu}{c}$.

II. Ist die Kugel nicht isoliert aufgestellt, sondern leitend mit der Erde verbunden, so ist die Dichtigkeit der elektrischen Ladung der Kugel nach (10a)

$$\varkappa = -\frac{\mu}{4\pi R c}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{R}{c}\right)^n P_n(\cos\vartheta_1) \tag{14a}$$

$$= -\frac{\mu}{4\pi R c}\,\frac{c\,(c^2-R^2)}{\sqrt{(c^2+R^2-2\,c\,R\cos\vartheta_1)^3}} = \frac{-\mu\,t^2}{4\pi R\varrho^3},$$

wo ϱ und t dieselbe Bedeutung wie vorher haben. Hier ist also die auf der Kugel verteilte Elektrizität überall mit μ ungleichartig, die gleichartige Elektrizität ist ganz

zur Erde abgeleitet. Die Gesamtmasse der elektrischen Ladung der Kugel ist nach (11)

$$(11a) \qquad M' = -\mu \frac{R}{c}.$$

Das Potential dieser Masse ist nach (4b) und (4a), S. 98,

für innere Punkte $$(18a) \quad V_i = -\frac{\mu}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^n P_n(\cos\vartheta) = -U,$$

für äußere Punkte $$(18b) \quad V_a = -\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{2n+1}}{r^{n+1} c^{n+1}} P_n(\cos\vartheta)$$
$$= -\mu \frac{R}{c} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{c^2} - 2r\frac{R^2}{c}\cos\vartheta}},$$

d. h. die Wirkung der Kugelladung allein auf äußere Punkte ist gleich der eines in A_1 liegenden Massenpunktes mit der Masse $-\mu \frac{R}{c}$.

c) Elektrizitätsverteilung auf einer von zwei konzentrischen Kugeln begrenzten Schale.

I. Die wirkenden äußeren Kräfte haben ihren Sitz im Außenraum.

R und R_0 $(R > R_0)$ seien die Radien der konzentrischen Kugeln, die die leitende, isoliert aufgestellte Schale begrenzen. Für das Potential U der gegebenen äußeren Kräfte gilt, da sie außerhalb der Kugel R liegen, wieder die Gleichung (4), S. 134. Die durch Influenz entstehende und die der Schale mitgeteilte freie Elektrizität könnte auf beiden Grenzflächen der Schale verteilt sein. Es sei ihre Dichtigkeit auf der Kugel $R = \varkappa$, auf der Kugel $R_0 = \lambda$, und, nach Kugelfunktionen entwickelt, sei

$$(19) \qquad \varkappa = \sum_0^{\infty} K_n(\vartheta_1, \varphi_1), \; \lambda = \sum_0^{\infty} L_n(\vartheta_1, \varphi_1).$$

Das Potential V der Masse von der Dichtigkeit $\varkappa$ ist, da die Schale innerhalb der Kugel R liegt, durch (6), S. 134 ge-

geben, während das Potential W der Masse von der Dichtigkeit λ, da die Schale außerhalb der Kugel R_0 liegt, nach (4a), S. 98 den Wert hat:

$$(20) \qquad W = 4\pi R_0 \sum_0^\infty \left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+1} \frac{L_n(\vartheta, \varphi)}{2n+1}.$$

Damit elektrisches Gleichgewicht besteht, muß für jeden Punkt im Innern der Schale

$$(21) \qquad U + V + W = C,$$

d. h. mit Weglassung der Argumente von Z_n, K_n, L_n

$$(21a) \sum_0^\infty \left\{ \left(\frac{r}{R}\right)^n \left[Z_n + \frac{4\pi R K_n}{2n+1}\right] + \left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+1} \frac{4\pi R_0 L_n}{2n+1} \right\} = C$$

sein. Da diese Gleichung für beliebige zwischen R und R_0 liegende Werte von r gilt, müssen die Koeffizienten aller Potenzen von r (außer von r^0) verschwinden. Das Verschwinden der Koeffizienten der negativen Potenzen von r erfordert, daß alle L_n, auch L_0, verschwinden. Damit aber wird auch $\lambda = 0$, d. h. auf der inneren Kugelfläche R_0 ist gar keine Elektrizität vorhanden, nur die äußere Kugelfläche R besitzt eine elektrische Ladung. Das Verschwinden der Koeffizienten der positiven Potenzen von r liefert genau dieselben Bedingungen wie bei einer Vollkugel, mithin auch denselben Wert von $\varkappa$ wie S. 135 [Gl. (10)]. Die Elektrizitätsverteilung auf einer von zwei konzentrischen Kugeln begrenzten Schale ist genau dieselbe wie auf einer Vollkugel, deren Radius gleich dem Radius der äußeren Grenzfläche der Schale ist. Solche Schalen wirken genau wie Vollkugeln.

Auch für den Fall, daß die Schale zur Erde abgeleitet ist, gilt dasselbe.

II. Die influenzierenden Kräfte haben ihren Sitz im inneren hohlen Raume.

In diesem Falle ist U das Potential von Massen, die innerhalb der Kugel R_0 liegen. Für Punkte außerhalb R_0, also auch für die Punkte innerhalb der Schale hat nach (15), S. 117 U die Form

$$(22) \qquad U = \sum_0^\infty \left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+1} Z_n(\vartheta, \varphi).$$

Dieser Ausdruck für U tritt an Stelle des Ausdruckes (4), S. 134; sonst ist alles ebenso wie in Nr. I. Die Gleichung (21) nimmt jetzt die Form an

$$\text{(21b)} \quad \sum_0^\infty \left\{ \frac{4\pi R K_n}{2n+1} \left(\frac{r}{R}\right)^n + \left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+1} \left[Z_n + \frac{4\pi R_0 L_n}{2n+1} \right] \right\} = C,$$

woraus folgt

$$\text{(23)} \qquad K_n = 0 \text{ für } n > 0, \; 4\pi R K_0 = C,$$

$$\text{(23a)} \qquad L_n = -\frac{(2n+1) Z_n}{4\pi R_0}.$$

Aus (23a) sieht man, daß hier auch die Innenfläche R_0 der Schale eine elektrische Ladung besitzt, und daß diese Ladung eine solche Dichtigkeit hat, daß ihr Potential W' [Gl. (20)] für alle Punkte außerhalb $R_0 = -U$ ist, d. h. daß die Wirkung der elektrischen Ladung von R_0 die Wirkung der im inneren hohlen Raume vorhandenen gegebenen elektrischen Kräfte aufhebt. Die Gesamtmasse der auf R_0 verteilten Elektrizität ist nach (5b), S. 99

$$\text{(24)} \qquad M' = 4\pi R_0^2 L_0 = -R_0 Z_0.$$

Die Ladung der äußeren Kugelfläche R hat, wie man aus (23) sieht, konstante Dichtigkeit. Die gesamte auf R ausgebreitete Elektrizität hat die Masse $M - M' = M + R_0 Z_0$, falls M die Masse der der Schale mitgeteilten freien Elektrizität ist. Denn da durch Influenz gleichviel von jeder der beiden Arten von Elektrizität entsteht, muß die Gesamtmasse beider Grenzflächen der Schale $= M$ sein. Die Dichtigkeit der auf R verteilten Elektrizität ist somit

$$\text{(25)} \qquad \varkappa = \frac{M + R_0 Z_0}{4\pi R^2} = K_0.$$

Ist $M = 0$, so ist $\varkappa = R_0 Z_0 : 4\pi R^2$; aber $R_0 Z_0$ ist die Gesamtmasse der Elektrizität, die das Potential U hervorbringt [denn diese Masse ist $\lim\limits_{r=\infty} (r\,U)$]. Dadurch, daß man den Sitz der gegebenen (als unveränderlich anzusehenden) elektrischen Kräfte mit einer von konzentrischen Kugeln begrenzten Schale umhüllt, wird erreicht, daß diese Kräfte nach außen so wirken, als wäre die Masse, die die Kräfte

hervorbringt, gleichförmig auf der äußeren Kugel R verteilt.

War die Schale nicht isoliert aufgestellt, sondern mit der Erde leitend verbunden, so ist $C=0$, daher $K_0=0$ und somit $\varkappa=0$. Die äußere Fläche R besitzt dann keine Ladung, während die Ladung der inneren Fläche R_0 dieselbe ist wie vorher.

Bemerkung. Die Elektrizitätsverteilung auf einer von zwei exzentrischen Kugeln begrenzten Schale sowie die Verteilung auf zwei leitenden Kugeln wird im nächsten Abschnitt behandelt werden.

d) Elektrizitätsverteilung auf einem nahezu kugelförmigen Leiter ohne Einwirkung äußerer Kräfte.

Die Gleichung einer Fläche, die von einer Kugel nur wenig abweicht (eines Sphäroids), hat in Polarkoordinaten bei passender Wahl des Anfangspunktes die Form

$$\bar{r}_1 = a\{1+\alpha F(\vartheta_1, \varphi_1)\}, \tag{26}$$

wo α eine kleine, von ϑ_1 und φ_1 unabhangige Größe bezeichnet; denn für $\alpha=0$ ist (26) die Gleichung einer Kugel. Die Größe α, von der die Abweichung von der Kugel abhängt, sei nun so klein, daß man ihre zweiten und höheren Potenzen vernachlässigen kann. Dann kann man von der Form (26) zu der anderen

$$\bar{r}_1 = c\{1+\alpha f(\vartheta_1, \varphi_1)\} \tag{26a}$$

übergehen, in der c den Radius der Kugel bezeichnet, die gleiches Volumen mit dem von dem Sphäroid begrenzten Raume hat. Denn das Volumen dieses Raumes ist, wenn r_1 der Radius eines inneren Punktes ist und für $\bar{r}_1$ der Ausdruck (26) genommen wird, bei unserer Näherung

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^{\bar{r}_1} r_1^2\, dr_1 \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1 = \frac{1}{3}a^3\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left[1+3\alpha F(\vartheta_1,\varphi_1)\right]\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1 .$$

Denkt man $F(\vartheta_1, \varphi_1)$ nach Kugelfunktionen entwickelt

$$F(\vartheta_1, \varphi_1) = \sum_0^\infty Y_m(\vartheta_1, \varphi_1),$$

so ist für $m > 0$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_m(\vartheta_1, \varphi_1) \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1 = 0,$$

und da Y_0 von ϑ_1, φ_1 unabhängig ist, so ist das Volumen

$$\frac{4}{3}\pi a^3 (1 + 3\alpha Y_0).$$

Dies soll gleich dem Volumen einer Kugel vom Radius c sein, also ist

(27) $$a^3(1 + 3\alpha Y_0) = c^3.$$

Daraus folgt bei unserer Näherung

(27a) $$a = c(1 - \alpha Y_0).$$

Setzt man (27a) in (26) ein und vernachlässigt α^2, so geht (26) in

(26b) $$\bar{r}_1 = c\left[1 + \alpha\left(F(\vartheta_1, \varphi_1) - Y_0\right)\right]$$

über. (26b) hat die Form von (26a); zugleich sieht man, daß

(28) $$f(\vartheta_1, \varphi_1) = F(\vartheta_1, \varphi_1) - Y_0 = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(\vartheta_1, \varphi_1)$$

ist; d. h. die Funktion $f(\vartheta_1, \varphi_1)$ in (26a) hat die Eigenschaft, daß bei ihrer Entwicklung nach Kugelfunktionen die Kugelfunktion nullter Ordnung fehlt.

Das Oberflächenelement des Sphäroids (26a) ist (vgl. Teil I, S. 66)

$$do = \frac{\bar{r}_1^2 \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1}{\cos\nu},$$

wo ν den Winkel bezeichnet, den der Radius $\bar{r}_1$ von do mit der äußeren Normale bildet. [Übrigens unterscheidet sich

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\bar{r}_1}\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial\vartheta_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\bar{r}_1 \sin\vartheta_1}\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial\varphi_1}\right)^2}}$$

von 1 nur um Glieder von der Ordnung α^2, so daß bei unserer Näherung ohne weiteres $\cos\nu = 1$ gesetzt werden

könnte.] Weiter ist das Potential des mit Masse von der Dichtigkeit k belegten Sphäroids

$$(29)\qquad V=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{k}{\cos\nu}\,\frac{\bar{r}_1^2\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1\,d\varphi_1}{\sqrt{r^2+\bar{r}_1^2-2r\bar{r}_1\cos\gamma}}.$$

Für innere Punkte r,ϑ,φ, für die r kleiner ist als der kleinste Wert von $\bar{r}_1$, kann man den reziproken Wert der unter dem Integral auftretenden Wurzel nach steigenden Potenzen von r entwickeln und gliedweise integrieren, wodurch man

$$(30)\qquad V=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{k}{\cos\nu}\,\frac{P_n(\cos\gamma)\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1\,d\varphi_1}{\bar{r}_1{}^{n-1}}$$

erhält.

Ist nun dem von dem Sphäroid begrenzten, isoliert aufgestellten Leiter eine gewisse Masse M freier Elektrizität mitgeteilt, während auf den Leiter keine äußeren elektrischen Kräfte wirken, so verteilt sich M auf dem Sphäroid mit einer solchen Dichtigkeit, daß das Potential dieser Belegung für alle inneren Punkte denselben konstanten Wert hat. Der Ausdruck (30) muß also in diesem Falle für alle in Betracht kommenden r von r unabhängig sein, d. h. es müssen die Koeffizienten aller Potenzen von r, außer dem von r^0, verschwinden, oder es muß

$$(31)\qquad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{k}{\cos\nu}\,\frac{P_n(\cos\gamma)\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1\,d\varphi_1}{\bar{r}_1{}^{n-1}}=0\qquad(n>0)$$

sein. Für $\alpha=0$, d. h. $\bar{r}_1=c$, $\cos\nu=1$ genügt dieser Bedingung nur ein konstanter Wert von k. Für sehr kleine α wird sich k von einer Konstanten k_0 nur wenig unterscheiden. Wir machen daher den Ansatz

$$(32)\qquad \frac{k}{\cos\nu}=k_0+\alpha\sum_{m=1}^{\infty}\Psi_m(\vartheta_1,\varphi_1),$$

wo die Ψ_m Kugelfunktionen sind. Nach (26a) und (28) ist ferner bei unserer Näherung

$$\frac{1}{\bar r_1^{n-1}} = \frac{1}{c^{n-1}}\left\{1-(n-1)\,\alpha\sum_{m=1}^{\infty} Y_m(\vartheta_1,\varphi_1)\right\}$$

und

$$\frac{k}{\cos\nu}\,\frac{1}{\bar r_1^{n-1}} = \frac{1}{c^{n-1}}\left\{k_0+\alpha\sum_{m=1}^{\infty}\left[\Psi_m(\vartheta_1,\varphi_1)-(n-1)k_0 Y_m(\vartheta_1,\varphi_1)\right]\right. \tag{33}$$

Setzt man diesen Ausdruck in (31) ein und wendet die Integralsätze der Kugelfunktionen an, so erhält man

$$\frac{4\pi}{2n+1}\cdot\frac{\alpha}{c^{n-1}}\left[\Psi_n(\vartheta,\varphi)-(n-1)\,k_0\,Y_n(\vartheta,\varphi)\right]=0 \tag{34}$$

oder

$$\Psi_n(\vartheta,\varphi)=(n-1)\,k_0\,Y_n(\vartheta,\varphi), \tag{34a}$$

während nach (30) der konstante Potentialwert für Punkte im Innern des Sphäroids

$$C=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{k}{\cos\nu}\,\bar r_1\,P_0(\cos\gamma)\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1\,d\varphi_1=4\pi\,k_0\,c \tag{35}$$

ist. Ferner ist die Gesamtmasse der elektrischen Ladung des Sphäroids

$$M=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{k}{\cos\nu}\,\bar r_1^2\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1\,d\varphi_1=4\,\pi\,k_0\,c^2. \tag{36}$$

Wir haben somit folgendes Resultat: Die Dichtigkeit der elektrischen Ladung des Sphäroids ist

$$k=\frac{\cos\nu\cdot M}{4\pi c^2}\left\{1+\alpha\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\,Y_n(\vartheta,\varphi)\right\}, \tag{37}$$

und der konstante Potentialwert im Innern ist

$$C=\frac{M}{c}. \tag{38}$$

Beispiel. Das Sphäroid sei ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit sehr kleiner Abplattung. Ist α die Abplattung, a der Äquatorialradius, also $a(1-\alpha)$ der Polarradius, so wird, falls ϑ_1 von der Rotationsachse gerechnet wird, streng

$$\bar r_1=\frac{a(1-\alpha)}{\sqrt{\cos^2\vartheta_1+(1-\alpha)^2\sin^2\vartheta_1}},$$

mit Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen von α aber

$$\bar{r}_1 = a\,(1 - \alpha \cos^2 \vartheta_1).$$

Ferner ist hier

$$c^3 = a^3\,(1 - \alpha),\quad a = c\,(1 + \frac{1}{3}\,\alpha),$$

mithin

$$\bar{r} = c\left\{1 - \alpha\left(\cos^2\vartheta_1 - \frac{1}{3}\right)\right\} = c\left\{1 - \alpha \cdot \frac{2}{3}\,P_2\,(\cos\vartheta_1)\right\},$$

d. h. hier ist

$$f(\vartheta_1, \varphi_1) = -\frac{2}{3}\,P_2\,(\cos\vartheta_1)$$

und daher, da $\cos\nu$ sich von 1 nur um Glieder von der Ordnung α^2 unterscheidet,

$$k = \frac{M}{4\pi c^2}\left\{1 - \frac{2}{3}\,\alpha\,P_2\,(\cos\vartheta_1)\right\} = \frac{M}{4\pi c^2}\left\{1 - \alpha\left(\cos^2\vartheta_1 - \frac{1}{3}\right)\right\}$$
$$= \frac{M}{4\pi a^2}\,(1 + \alpha \sin^2\vartheta_1).$$

Kapitel 6.

Anwendung der Methode der Transformation durch reziproke Radien in der Potentialtheorie.

a) Die Transformation durch reziproke Radien.

In den vorhergehenden Kapiteln sind wir wiederholt auf Beziehungen zwischen zwei Punkten P, Π geführt, die folgende Lage haben. Ist O der Mittelpunkt einer Kugel vom Radius R, so liegen P und Π auf demselben Kugelradius in solchen Abständen von O, daß

$$(1)\qquad O P \cdot O \Pi = R^2$$

ist. Sind r, ϑ, φ die raumlichen Polarkoordinaten von P, auf O als Anfangspunkt bezogen, ϱ, λ, ψ die von Π, so ist

$$(1\,\mathrm{a})\qquad r\,\varrho = R^2,\ \lambda = \vartheta,\ \varphi = \psi.$$

Zwischen den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z von P und ξ, η, ζ von Π ergeben sich daraus die Relationen

$$(1\text{b})\qquad \xi=\frac{R^2 x}{x^2+y^2+z^2},\ \eta=\frac{R^2 y}{x^2+y^2+z^2},\ \zeta=\frac{R^2 z}{x^2+y^2+z^2}$$

und umgekehrt

$$(1\text{c})\qquad x=\frac{R^2\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\ y=\frac{R^2\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\ z=\frac{R^2\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}.$$

Zwei derartige Punkte nennt man reziproke Punkte, da, falls $R=1$, $\varrho=\frac{1}{r}$ ist.

Sucht man zu einer Reihe von Punkten P die reziproken Punkte Π, so nennt man diesen Übergang Transformation durch reziproke Radien, die Kugel mit dem Radius R heißt die Transformationskugel, ihr Mittelpunkt das Transformationszentrum. Sucht man insbesondere zu allen Punkten P einer Fläche F die reziproken Punkte Π, so liegen diese auf einer neuen Fläche Φ, der reziproken Fläche von F. Aus der Gleichung von F ergibt sich mittels (1a) und (1c) die von Φ. Ist die Gleichung von F in Polarkoordinaten

$$(2)\qquad r=f(\vartheta,\varphi),$$

so ist die Gleichung der reziproken Fläche

$$(2\text{a})\qquad \varrho=\frac{R^2}{f(\lambda,\psi)};$$

und hat F in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung

$$(3)\qquad F(x,y,z)=0,$$

so erhält man die Gleichung der reziproken Fläche, wenn man in (3) für x, y, z die Ausdrücke (1c) setzt.

Speziell ist die reziproke Fläche einer durch O gehenden Ebene E die Ebene E selbst. Die reziproke Fläche einer nicht durch O gehenden Ebene ist eine durch O gehende Kugel, und umgekehrt hat eine durch O gehende Kugel zur reziproken Fläche eine Ebene. Die reziproke Fläche einer nicht durch O gehenden Kugel ist wieder eine Kugel. Die reziproke Fläche des dreiachsigen Ellipsoids

$$(4)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ist, falls der Mittelpunkt das Transformationszentrum ist, das Ovaloid

$$(4\text{a}) \qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \frac{R^4\xi^2}{a^2}+\frac{R^4\eta^2}{b^2}+\frac{R^4\zeta^2}{c^2}$$

oder in Polarkoordinaten

$$(4\text{b}) \qquad \varrho^2 = \frac{R^4}{a^2}\cos^2\lambda + \frac{R^4}{b^2}\sin^2\lambda\cos^2\psi + \frac{R^4}{c^2}\sin^2\lambda\sin^2\psi\,.$$

Bei der Transformation einer geschlossenen Fläche F ist folgendes zu beachten. Liegt das Transformationszentrum innerhalb F, und ist Φ die reziproke Fläche von F, die ebenfalls geschlossen ist, so entsprechen Punkten P_1 innerhalb F als reziproke Punkte solche Punkte Π_1, die außerhalb Φ liegen, und den Punkten außerhalb F entsprechen Punkte innerhalb Φ. Denn sind P_1 und Π_1 entsprechende Punkte, so liegen sie auf demselben Radius, und es ist $OP_1 . O\Pi_1 = R^2$. Trifft dieser Radius F in P, Φ in Π, so ist auch $OP . O\Pi = R^2$. Sind O und P_1 innere Punkte von F, so ist $OP_1 < OP$, daher $O\Pi_1 > O\Pi$, d. h. Π_1 liegt außerhalb der Fläche Φ. Liegt dagegen O außerhalb der geschlossenen Fläche F, so entsprechen bei der Transformation durch reziproke Radien inneren Punkten von F stets innere Punkte von Φ. Denn hier schneidet OP_1 die Fläche F zweimal, in A_1 und A, die Fläche Φ in A_1 und A. Ferner ist

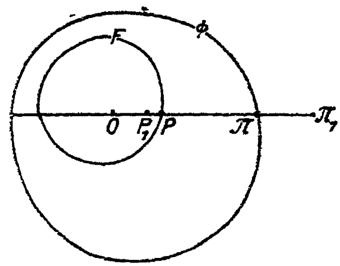

Fig. 8.

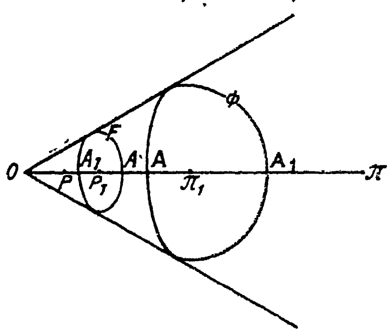

Fig 9.

$$OA_1 < OP_1 < OA,$$

daher aus demselben Grunde wie oben

$$O\mathsf{A}_1 > O\Pi_1 > O\mathsf{A}.$$

Der zu einem endlichen Raume T, der von der Fläche F umschlossen wird, reziproke Raum T erstreckt sich, wenn O in T liegt, außerhalb Φ ins Unendliche, und der Raum T' außerhalb F hat den Raum T' innerhalb Φ zum reziproken Raum. Liegt aber O außerhalb T, so liegt der reziproke Raum T ganz im Endlichen und wird vom Φ umschlossen.

b) Beziehungen von Lösungen der Laplaceschen Gleichung für reziproke Räume.

In dem Raume T, der entweder ganz im Endlichen liegen oder auch sich ins Unendliche erstrecken kann, sei

$$V = f(r, \vartheta, \varphi) \tag{5}$$

eine Funktion, die der Laplaceschen Gleichung genügt und alle Stetigkeitseigenschaften des Potentials besitzt, so genügt die Funktion

$$W = \frac{1}{\varrho} f\left(\frac{R^2}{\varrho}, \lambda, \psi\right) \tag{6}$$

der Laplaceschen Gleichung in dem zu T reziproken Raume T und besitzt dort alle Stetigkeitseigenschaften des Potentials.

Beweis. Man bilde

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} \\ &= \frac{1}{\varrho^2}\left\{\frac{\partial \varrho^2 \frac{\partial W}{\partial \varrho}}{\partial \varrho} + \frac{1}{\sin\lambda}\,\frac{\partial \sin\lambda \frac{\partial W}{\partial \lambda}}{\partial \lambda} + \frac{1}{\sin^2\lambda}\,\frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2}\right\} \end{aligned} \tag{7}$$

[nach Gl. (12), S. 7]. Da für reziproke Punkte die Gleichungen (1a) gelten, so kann man (6) so schreiben:

$$W = \frac{r}{R^2} f(r, \vartheta, \varphi). \tag{6a}$$

Andererseits kann man in (7) die Differentiationen nach ϱ, λ, ψ in solche nach r, ϑ, φ verwandeln. Dadurch geht, da

$$\frac{\partial ()}{\partial \varrho} = -\frac{\partial ()}{\partial r}\,\frac{r^2}{R^2} = -\frac{\partial ()}{\partial r}\,\frac{R^2}{\varrho^2}$$

ist, (7) in

$$\text{(7a)}\qquad \Delta W = \frac{r^2}{R^4}\left\{r^2\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta \dfrac{\partial W}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}\right\}$$

über. Setzt man auf der rechten Seite von (7a) für W den Ausdruck (6a) ein, so wird

$$\begin{aligned}\text{(8)}\ \Delta W &= \frac{r^2}{R^6}\left[r^2\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta \dfrac{\partial(rf)}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2(rf)}{\partial \varphi^2}\right]\\ &= \frac{r^3}{R^6}\left[r\,\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta \dfrac{\partial f}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right],\end{aligned}$$

wo der Kürze halber die Argumente r, ϑ, φ von f fortgelassen sind.

Weiter ist

$$r\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2} = r\left[r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2\frac{\partial f}{\partial r}\right] = \frac{\partial\, r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}}{\partial r},$$

so daß

$$\text{(8a)}\ \Delta W = \frac{r^3}{R^6}\left[\frac{\partial\, r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta \dfrac{\partial f}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right]$$

wird. Nun sollte f im Raume T der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

oder

$$\text{(9)}\qquad \frac{\partial\, r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta \dfrac{\partial f}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0$$

genügen. Mithin genügt der Ausdruck (6a) oder (6) für W im Raum T der Gleichung

$$\text{(10)}\qquad \Delta W = 0.$$

Ferner soll in T die Funktion f mit allen ihren Ableitungen endlich und kontinuierlich sein. Ein Blick auf die Gleichung (6) läßt erkennen, daß auch W und alle seine Ableitungen nach ϱ, λ, ψ endlich und kontinuierlich sind, so lange r und ϱ beide endlich sind. Wird aber $r=0$, so wird $\varrho=\infty$. Der Fall $r=0$ kann nur eintreten, wenn O innerhalb T liegt, daher ist f nebst seinen Ableitungen auch für $r=0$ endlich, wegen des Faktors $\frac{1}{\varrho}$ wird also $W=0$. Für $\varrho=\infty$ wird $W=0$, so aber, daß $\lim(\varrho W)$ auch dann endlich bleibt. Das ist aber eine der charakteristischsten Eigenschaften des Potentials. Ferner wird

$$\frac{\partial W}{\partial \varrho}=-\frac{1}{\varrho^2}f-\frac{R^2}{\varrho^3}\frac{\partial f}{\partial r},$$

$\frac{\partial W}{\partial \varrho}$ verschwindet daher ebenfalls für $\varrho=\infty$, und zwar so, daß $\lim\left(\varrho^2\frac{\partial W}{\partial \varrho}\right)$ endlich bleibt, ebenfalls eine charakteristische Eigenschaft des Potentials. — Wenn ferner $r=\infty$ wird, was nur eintreten kann, wenn T sich ins Unendliche erstreckt, dann wird für $r=\infty$ $f=0$, derart aber, daß $\lim(rf)$ endlich bleibt; d. h. (da $\varrho=0$ wird für $r=\infty$) $\lim\frac{R^2}{\varrho}f\left(\frac{R^2}{\varrho},\lambda,\psi\right)$ ist auch für $\varrho=0$ endlich. Daraus folgt, daß, wenn der Ausdruck (5) für V im Raume T alle charakteristischen Eigenschaften des Potentials besitzt, das gleiche auch für den Ausdruck (6) von W im Raume T gilt.

Zusatz. Die Poissonsche Gleichung für reziproke Räume.

Genügt der Ausdruck (5) im Raume T nicht der Laplaceschen, sondern der Poissonschen Gleichung, so ist

$$(11)\quad \Delta f=\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial r^2\frac{\partial f}{\partial r}}{\partial r}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right\}=-4\pi k,$$

wo k die Dichtigkeit der Masse in T bezeichnet. Setzt man (11) in (8a) ein, so wird hier

$$(12) \qquad \Delta W = -4\pi k \frac{r^5}{R^6} = -4\pi k \frac{R^4}{\varrho^5}.$$

Soll nun W innerhalb T ebenfalls der Poissonschen Gleichung genügen, so muß der Raum T mit Masse von der Dichtigkeit

$$(13) \qquad k' = k \cdot \frac{R^4}{\varrho^5}$$

angefüllt werden, wobei in k die Koordinaten r, ϑ, φ durch ϱ, λ, ψ auszudrücken sind. Damit bei endlichen Werten von k auch k' endlich ist, darf ϱ nicht $= 0$, d. h. r nicht $= \infty$ werden, der Raum T darf sich nicht ins Unendliche erstrecken. Soll endlich noch der Raum T ein endlicher sein, so muß O außerhalb des endlichen Raumes T liegen.

Folgerung. Kennt man für einen endlichen Raum T, der mit Masse von der Dichtigkeit k angefüllt ist, den Wert des Potentials V fur Punkte außerhalb wie innerhalb der Masse, geht ferner T durch Transformation mittels reziproker Radien von einem außerhalb T liegenden Transformationszentrum O aus in den Raum T über, so kennt man auch das Potential W des Raumes T für Masse von der Dichtigkeit $k' = \frac{k R^4}{\varrho^5}$, und zwar für Punkte außerhalb wie innerhalb T. Denn

$$W = \frac{1}{\varrho} V$$

genügt nach dem, was eben erörtert ist, außerhalb T der Gleichung $\Delta W = 0$, innerhalb T der Gleichung $\Delta W = -4\pi k'$; ferner besitzt W alle sonstigen charakteristischen Eigenschaften des Potentials. Dadurch aber ist nach dem Satze Teil I, S. 98 W eindeutig bestimmt.

Anwendung. Als Raum T nehmen wir den Raum zwischen zwei ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden, als Transformationszentrum den Mittelpunkt O beider Ellipsoide. Ist T mit Masse von konstanter Dichtigkeit k_0 gefüllt, so ist V bekannt sowohl für den hohlen Raum T'' innerhalb des kleineren Ellipsoids, als für den Raum T'

außerhalb des größeren Ellipsoids, als auch für T selbst. Damit kennen wir auch das Potential W der Masse, die in dem Raume zwischen den zu den Ellipsoiden reziproken Ovaloiden mit der Dichtigkeit $k' = k_0 \frac{R^4}{\varrho^5}$ verteilt ist; und zwar ergibt sich der Wert von W für Punkte in dem Raume T' außerhalb des äußeren Ovaloids aus dem Werte von V im Raume T' innerhalb des kleineren Ellipsoids. Innerhalb T' aber hat V einen konstanten Wert C, außerhalb des größeren Ovaloids ist also

$$W = \frac{C}{\varrho}.$$

Das ist aber das Potential eines in O liegenden Massenpunktes.

Wir haben sonach das Resultat: Ist der Raum zwischen den Ovaloiden

$$\varrho^2 = \frac{R^4}{a^2}\cos^2\lambda + \frac{R^4}{b^2}\sin^2\lambda\cos^2\psi + \frac{R^4}{c^2}\sin^2\lambda\sin^2\psi$$

und

$$\varrho^2 = \frac{R^4}{n^2 a^2}\cos^2\lambda + \frac{R^4}{n^2 b^2}\sin^2\lambda\cos^2\psi + \frac{R^4}{n^2 c^2}\sin^2\lambda\sin^2\psi,$$

von denen für $n > 1$ das zweite ganz innerhalb des ersten liegt, mit Masse von der Dichtigkeit $k_0 \frac{R^4}{\varrho^5}$ gefüllt, so übt diese Masse auf Punkte außerhalb des ersten Ovaloids dieselbe Wirkung aus wie eine gewisse im Mittelpunkt beider Ovaloide konzentrierte Masse.

Der Wert von C und damit der in O konzentrierten Masse ergibt sich aus der Formel (24a), S. 230 des ersten Teils.

III. Abschnitt.

Die Potentialaufgaben für Rotationsellipsoide und exzentrische Kugeln.

Kapitel 1.

Verlängertes Rotationsellipsoid.

a) Einführung neuer Variabler.

Wie man zur Behandlung der Potentialaufgaben der Kugel räumliche Polarkoordinaten einführte, so muß man für die analogen Aufgaben der Rotationsellipsoide die rechtwinkligen Koordinaten durch andere Variable derart ausdrücken, daß, wenn die eine dieser Variablen konstant gesetzt wird, sich die Gleichung des Rotationsellipsoids ergibt. Das erreicht man durch eine kleine Modifikation der räumlichen Polarkoordinaten. Setzt man nämlich

$$(1) \qquad \begin{cases} x = r\cos\vartheta\,, \\ y = \sqrt{r^2 - e^2}\sin\vartheta\cos\varphi\,, \\ z = \sqrt{r^2 - e^2}\sin\vartheta\sin\varphi\,, \end{cases}$$

so folgt durch Elimination von ϑ und φ aus (1):

$$(2) \qquad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2 + z^2}{r^2 - e^2} = 1\,.$$

Gibt man r einen konstanten Wert $> e$, so ist (2) die Gleichung eines verlängerten Rotationsellipsoids, und die den verschiedenen Werten von r entsprechenden Rotationsellipsoide haben dieselben Brennpunkte, da die Differenz der Halbachsenquadrate für alle dieselbe ist, nämlich e^2.

Die Elimination von r, φ aus den Gleichungen (1) ergibt

$$(2\text{a}) \qquad \frac{x^2}{e^2\cos^2\vartheta} - \frac{y^2 + z^2}{e^2\sin^2\vartheta} = 1\,.$$

Für konstante Werte von ϑ ist (2a) die Gleichung eines zweischaligen Rotationshyperboloids. Die den verschiedenen Werten von ϑ entsprechenden Rotationshyperboloide haben sämtlich dieselben Brennpunkte wie die Rotationsellipsoide. Die Flächen (2) sind also konfokale Rotationsellipsoide und die Flächen (2a) konfokale zweischalige Rotationshyperboloide, und zwar sind letztere nicht nur untereinander, sondern auch zu den Rotationsellipsoiden konfokal. Irgendeine Fläche (2) wird von jeder der Flächen (2a) senkrecht geschnitten. Denn die Flächen (2) und (2a) entstehen durch Rotation konfokaler Ellipsen und Hyperbeln um die Hauptachse, und da sich konfokale Ellipsen und Hyperbeln senkrecht schneiden, gilt ein gleiches auch für die durch ihre Rotation entstehenden Flächen.

Eliminiert man endlich r und ϑ aus den Gleichungen (1), so erhält man

(2b) $$z = y \operatorname{tg} \varphi;$$

das sind Ebenen, die sämtlich durch die Rotationsachse x gehen und daher die Flächen (2) und (2a), deren Normalen ja in der Meridianebene liegen, senkrecht schneiden. Die hier in Frage kommenden Flächenscharen

$$r = \text{const}, \quad \vartheta = \text{const}, \quad \varphi = \text{const}$$

sind somit orthogonal. Das ergibt sich auch ohne die geometrischen Überlegungen daraus, daß, wie eine einfache Rechnung zeigt, die Orthogonalitätsbedingungen (6), S. 4 erfüllt sind.

Um alle Punkte des Raumes zu erhalten, muß man r von e bis ∞, ϑ von 0 bis π, φ von 0 bis 2π variieren lassen. Dann gehört zu jedem Punkte des Raumes nur ein Wertsystem r, ϑ, φ (nur daß $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ dieselben Punkte ergeben). Für den Grenzwert $r = e$ ist $y = z = 0$, $x = e \cos \vartheta$. Dadurch werden alle Punkte der Linie dargestellt, welche die beiden Brennpunkte ($x = +e$ und $x = -e$) verbindet. Diese Linie kann als verlängertes Rotationsellipsoid angesehen werden, dessen Nebenachse $= 0$ ist. Für den Fall $\vartheta = 0$ wird ebenfalls $y = z = 0$, aber $x = r$, das ist, da $r > e$ ist, der Teil der Rotationsachse,

der sich vom Brennpunkte $x = +e$ ins Unendliche erstreckt Für $\vartheta = \pi$ erhält man den Teil der Rotationsachse, der von $x = -e$ bis $x = -\infty$ reicht. Beide Teile zusammen kann man als ein zweischaliges Rotationshyperboloid ansehen, dessen Nebenachse $= 0$ ist. Entsprechend gehören zu zwei Werten ϑ und $\pi - \vartheta$ nicht zwei verschiedene Rotationshyperboloide, sondern für ϑ erhält man die Punkte des einen, für $\pi - \vartheta$ die des anderen Mantels desselben Rotationshyperboloids. Für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ endlich degeneriert das Rotationshyperboloid in die yz-Ebene, die als ein Rotationshyperboloid angesehen werden kann, dessen Hauptachse verschwindet, und dessen beide Mäntel infolgedessen zusammenfallen.

Die neuen Variabeln r, ϑ, φ nennt man elliptische Koordinaten. (Allerdings sind dies nicht die allgemeinen elliptischen Koordinaten.)

b) Transformation und Lösung der Laplaceschen Gleichung.

Wie bei der Kugel haben wir den Ausdruck ΔV auf die neuen Variabeln zu transformieren. Dazu sind nach S. 6 die Ausdrücke zu bilden

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} l &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}, \\ m &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right)^2}, \\ n &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}. \end{aligned}\right.$$

Die Ausführung der Rechnung ergibt

$$(3\,\mathrm{a})\qquad l = \frac{\sqrt{r^2 - e^2\cos^2\vartheta}}{\sqrt{r^2 - e^2}},\quad m = \sqrt{r^2 - e^2\cos^2\vartheta},\quad n = \sqrt{r^2 - e^2}\sin\vartheta,$$

und daher wird nach Gleichung (9), S. 6

$$(4)\quad \Delta V=\frac{1}{(r^2-e^2\cos^2\vartheta)\sin\vartheta}$$

$$\cdot\left\{\frac{\partial (r^2-e^2)\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial r}}{\partial r}+\frac{\partial \sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta}+\frac{\partial\frac{r^2-e^2\cos^2\vartheta}{(r^2-e^2)\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}}{\partial\varphi}\right\}$$

$$=\frac{1}{r^2-e^2\cos^2\vartheta}$$

$$\cdot\left\{\frac{\partial(r^2-e^2)\frac{\partial V}{\partial r}}{\partial r}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta}+\left(\frac{e^2}{r^2-e^2}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

Die Laplacesche Gleichung $\Delta V=0$ reduziert sich demnach auf folgende:

$$(4\text{a})\quad \frac{\partial(r^2-e^2)\frac{\partial V}{\partial r}}{\partial r}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta}+\left(\frac{1}{\sin^2\vartheta}+\frac{e^2}{r^2-e^2}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0.$$

Wir suchen zuerst eine Lösung dieser Gleichung, die für alle Punkte innerhalb eines gegebenen Rotationsellipsoids (also für $r<a$) nebst ihren Ableitungen endlich, eindeutig und stetig ist. Wie in Kapitel 3 des vorhergehenden Abschnitts fragen wir zuerst, ob es möglich ist, der Gleichung (4a) durch das Produkt

$$(5)\qquad V=V_1\,V_2\,V_3$$

zu genügen, in dem V_1 nur von r, V_2 nur von ϑ, V_3 nur von φ abhängt. Die Einsetzung des Ausdrucks (5) in (4a) ergibt

$$(5\text{a})\quad \frac{1}{V_1}\frac{d(r^2-e^2)\frac{dV_1}{dr}}{dr}+\frac{1}{\sin\vartheta\cdot V_2}\frac{d\sin\vartheta\frac{dV_2}{d\vartheta}}{d\vartheta}$$

$$=-\left(\frac{1}{\sin^2\vartheta}+\frac{e^2}{r^2-e^2}\right)\frac{1}{V_3}\frac{d^2V_3}{d\varphi^2}.$$

Differentiiert man (5a) nach φ, so verschwindet die linke Seite, es muß also

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{V_3}\frac{d^2 V_3}{d\varphi^2}\right)=0$$

oder

$$\frac{1}{V_3}\frac{d^2 V_3}{d\varphi^2}=-c \tag{6}$$

sein. Diese Gleichung ist dieselbe wie die früher behandelte Gleichung (17b), S. 72. Wie dort ist, damit V_3 eindeutig ist, also für $\varphi=0$ und $\varphi=2\pi$ denselben Wert hat, erforderlich, daß c das Quadrat einer ganzen Zahl ν (einschließlich Null) ist, und dann hat (6) die Lösung

$$V_3=C\cos(\nu\varphi)+C'\sin(\nu\varphi), \tag{6a}$$

worin C und C' willkürliche Konstante sind. Setzt man in (5a) für $\frac{1}{V_3}\frac{d^2 V_3}{d\varphi^2}$ seinen Wert $-\nu^2$ ein, so geht (5a) in

$$\frac{1}{V_1}\frac{d(r^2-e^2)\frac{dV_1}{dr}}{dr}-\frac{\nu^2 e^2}{r^2-e^2}=-\left\{\frac{1}{\sin\vartheta\cdot V_2}\frac{d\sin\vartheta\frac{dV_2}{d\vartheta}}{d\vartheta}-\frac{\nu^2}{\sin^2\vartheta}\right\} \tag{5b}$$

über. Da bei der Differentiation von (5b) nach ϑ die linke, bei der Differentiation nach r die rechte Seite verschwindet, jede Seite aber nur von einer der Variabeln r, ϑ abhängt, so muß jede Seite von (5b) derselben Konstanten gleich sein. Wird diese Konstante mit $a(a+1)$ bezeichnet, wo a zunächst beliebig ist, so wird

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d\sin\vartheta\frac{dV_2}{d\vartheta}}{d\vartheta}+\left(a(a+1)-\frac{\nu^2}{\sin^2\vartheta}\right)V_2=0, \tag{7}$$

$$\frac{d(r^2-e^2)\frac{dV_1}{dr}}{dr}-\left(a(a+1)+\frac{\nu^2 e^2}{r^2-e^2}\right)V_1=0. \tag{8}$$

Gleichung (7) hat die Form der Differentialgleichung der zugeordneten Kugelfunktionen, nur daß hier ein beliebiger

Parameter α an Stelle des ganzzahligen Parameters n bei den Zugeordneten steht. Wie S. 114 schließen wir, daß, damit V_2 in dem betrachteten Raume überall endlich ist, der Parameter α eine ganze Zahl n und zugleich $n \geqq \nu$ sein muß. Die einzige endliche Lösung von (7) wird, wie an der zitierten Stelle,

$$V_2 = B\, P_{n.\nu}(\cos\vartheta)\,. \tag{7a}$$

Führt man endlich in (8) statt r die Variable $\lambda = \frac{r}{e}$ ein, so wird

$$\frac{d\,(\lambda^2-1)\,\frac{d V_1}{d\lambda}}{d\lambda} - \left(n\,(n+1) + \frac{\nu^2}{\lambda^2-1}\right) V_1 = 0\,. \tag{8a}$$

Das ist wiederum die Differentialgleichung der zugeordneten Kugelfunktionen [vgl. Gl. (14), S. 57], ihre allgemeine Lösung ist

$$V_1 = A\, P_{n,\nu}(\lambda) + A'\, Q_{n,\nu}(\lambda) = A\, P_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right) + A'\, Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right). \tag{8b}$$

Damit diese Lösung für alle Punkte im Innern des Ellipsoids $r = a$, somit auch für $r = e$ endlich bleibt, muß $A' = 0$ sein; denn $Q_{n,\nu}(1)$ ist $= \infty$. Wir haben somit folgende Lösung von (4a), die allen Nebenbedingungen genügt:

$$V = A\,B\, P_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\,[C\cos(\nu\varphi) + C'\sin(\nu\varphi)]\,, \tag{9}$$

und darin kann $A\,B = 1$ gesetzt werden, da $A\,B\,C$ nur ebenso eine willkürliche Konstante bezeichnet wie C allein. In (9) sind n und ν ganze Zahlen, $n \geqq \nu$. Solcher Lösungen gibt es unendlich viele. Die allgemeinste Lösung mit den geforderten Eigenschaften erhält man, wenn man die Summe aller möglichen partikulären Lösungen (9) bildet, wobei die Konstanten C, C' von Glied zu Glied andere sein können, d. h. es wird, wenn durch den Index i angedeutet wird, daß es sich um innere Punkte handelt,

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} P_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\,[C_{n\nu}\cos(\nu\varphi) + C'_{n\nu}\sin(\nu\varphi)]\,. \tag{9a}$$

Suchen wir zweitens für alle Punkte außerhalb eines gegebenen Rotationsellipsoides $r=a$ eine Lösung von (4a), die denselben Nebenbedingungen wie oben genügt, die aber im Unendlichen verschwindet, so ändert sich nur der an die Gleichung (8b) geknüpfte Schluß. In diesem Falle ist $r>a$, daher sicher $r>e$, $\frac{r}{e}>1$; für keinen Punkt des Gebiets wird $Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)$ unendlich. Damit aber V_1 für $r=\infty$ verschwindet, muß $A=0$ sein, A' von 0 verschieden. Somit ergibt sich, wenn für äußere Punkte zu V der Index a gesetzt wird, als Lösung

$$(9\text{b})\quad V_a=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)P_{n,\nu}(\cos\vartheta)[D_{n\nu}\cos(\nu\varphi)+D'_{n\nu}\sin(\nu\varphi)].$$

Handelt es sich drittens um eine Lösung von (4a), die allen obigen Nebenbedingungen in dem Raume zwischen zwei konfokalen Rotationsellipsoiden $r=a$ und $r=a_1$ genügt, so kann in diesem Gebiet r weder den Wert e annehmen, noch unendlich werden, in (8b) braucht somit keine der Konstanten A, A' zu verschwinden, und wir erhalten als allgemeinste Lösung

$$(9\text{c})\quad V=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\left\{\cos(\nu\varphi)\left[C_{n\nu}P_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)+D_{n\nu}Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\sin(\nu\varphi)\left[C'_{n\nu}P_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)+D'_{n\nu}Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)\right]\right\}.$$

c) Anwendungen.

Mittels der eben abgeleiteten Resultate kann man die beiden Randwertaufgaben für Gebiete innerhalb oder außerhalb eines verlängerten Rotationsellipsoids oder solche Gebiete, die von zwei konfokalen derartigen Ellipsoiden begrenzt werden, genau in derselben Weise lösen wie die entsprechenden Aufgaben für die Kugel.

Sucht man z. B. die Lösung von (4a), die innerhalb der Fläche $r=a$ allen obengenannten Nebenbedingungen genügt und zugleich an der Fläche $r=a$ einer gegebenen Funktion $F(\vartheta,\varphi)$ gleich wird [erste Randwertaufgabe

für den Innenraum eines verlängerten Rotationsellipsoids], so wissen wir, daß die Lösung die Form (9a) haben muß. Den Wert von V für $r = a$ erhalten wir einerseits, indem wir in (9a) $r = a$ setzen. Andererseits soll dieser Wert $= F(\vartheta, \varphi)$ sein. Diese Funktion entwickle man nach Kugelfunktionen

$$(10)\quad F(\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta,\varphi)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\left(A_{n\nu}\cos(\nu\varphi) + B_{n\nu}\sin(\nu\varphi)\right),$$

wo $A_{n\nu}, B_{n\nu}$ bekannt sind. Sowohl (9a), als (10) stellen Reihen dar, die nach Kugelfunktionen fortschreiten. Sollen für $r = a$ beide Reihen gleich sein, so müssen die einzelnen Kugelfunktionen gleich sein, d. h. für jedes n muß

$$\sum_{\nu=0}^{n} P_{n,\nu}\left(\frac{a}{e}\right) P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\left\{C_{n\nu}\cos(\nu\varphi) + C'_{n\nu}\sin(\nu\varphi)\right\}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\left\{A_{n\nu}\cos(\nu\varphi) + B_{n\nu}\sin(\nu\varphi)\right\}$$

sein. Diese Gleichheit kann nur bestehen, wenn beiderseits für jedes ν die Koeffizienten von $\cos(\nu\varphi)$ und $\sin(\nu\varphi)$ gleich sind, wie sich aus den bekannten Integralsätzen der trigonometrischen Funktionen ergibt. Dadurch sind alle $C_{n\nu}$ und $C'_{n\nu}$ bestimmt, und wir haben folgendes Resultat: Sind die Werte, die V für $r = a$ annimmt (die Randwerte von V), durch (10) gegeben, so hat V für alle inneren Punkte den Wert

$$(11)\quad V = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} \frac{P_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)}{P_{n,\nu}\left(\frac{a}{e}\right)} P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\left\{A_{n\nu}\cos(\nu\varphi) + B_{n\nu}\sin(\nu\varphi)\right\}.$$

Ähnlich lassen sich die übrigen Fälle der ersten wie auch die entsprechenden Fälle der zweiten Randwertaufgabe behandeln.

Auch die Aufgaben der Elektrizitätsverteilung auf einem leitenden verlängerten Rotationsellipsoid lassen sich auf Grund der Gleichungen (9a), (9b), (9c) genau ebenso durchführen, wie die analogen Aufgaben bei Kugeln. Als

Beispiel wollen wir die einfachste derartige Aufgabe behandeln:

Einem leitenden, isoliert aufgestellten verlängerten Rotationsellipsoid sei eine gewisse Menge M freier Elektrizität mitgeteilt; mit welcher Dichtigkeit verteilt sich dieselbe auf dem Leiter, falls keine äußeren Kräfte wirken?

Wie schon früher (S. 133) bemerkt, kann man das Resultat unmittelbar aus den in Band I (S. 232—234) entwickelten Formeln ablesen. Wenn hier eine neue Ableitung gegeben wird, so geschieht es einmal, um eine Anwendung der vorstehenden Formeln zu geben, sodann, um das Resultat ohne Grenzübergang, auf dem die erwähnten Formeln von Bd. I beruhen, herzuleiten.

Da die dem leitenden verlängerten Rotationsellipsoid mitgeteilte Elektrizität sich auf der Oberfläche ausbreitet, so gilt für das Potential dieser Ladung die Laplacesche Gleichung, und zwar sowohl für den Innen-, als den Außenraum. Für innere Punkte sei V mit V_i, für äußere mit V_a bezeichnet. Für V_i gilt dann die Formel (9a), für V_a aber (9b) Damit elektrisches Gleichgewicht stattfindet, ohne daß äußere Kräfte wirken, muß V_i einen konstanten Wert haben. Soll aber eine Kugelfunktionenreihe [und das ist der Ausdruck (9a)] einen konstanten Wert haben, so müssen alle Kugelfunktionen für $n > 0$ verschwinden, mithin alle $C_{n\nu}$, $C'_{n\nu} = 0$ sein, außer für $n = 0$. Für $n = 0$ besteht die innere, über alle ν zu erstreckende Summe nur aus einem Gliede, dem für $\nu = 0$, und es ist $P_{0,0}(x) = P_0(x) = 1$, so daß

$$(12) \qquad V_i = C_{00}$$

wird. An der Oberfläche des Leiters muß zufolge der allgemeinen Eigenschaften des Flächenpotentials V_a ebenfalls den Wert C_{00} haben. Die Reihe (9b) für V_a ist ihrerseits eine Kugelfunktionenreihe; soll sie für $r = a$ konstant sein, so müssen alle $D_{n\nu}, D'_{n\nu}$ für $n > 0$ verschwinden, und es muß weiter

$$D_{00}\, Q_0\left(\frac{a}{e}\right) = C_{00}$$

sein, so daß für beliebige äußere Punkte

(13) $$V_a = C_{00} \frac{Q_0\left(\frac{r}{e}\right)}{Q_0\left(\frac{a}{e}\right)}$$

wird [denn $Q_{0,0}(x)$ ist $= Q_0(x)$, vgl. Formel (7), S. 55]. Aus (12) und (13) ergibt sich die Dichtigkeit $\varkappa$ der Ladung mittels der Eigenschaft des Flächenpotentials

(14) $$\lim\left(\frac{\partial V_a}{\partial N} - \frac{\partial V_i}{\partial N}\right) = -4\pi\varkappa .$$

V_i ist im ganzen Innenraum konstant, daher sind alle Ableitungen von $V_i = 0$, auch $\lim \frac{\partial V_i}{\partial N} = 0$. Ferner ist nach S. 5 und 6

$$dN = +l\,dr,$$

und zwar ist das $+$-Zeichen zu nehmen, weil in (14) N die äußere Normale der Fläche $r = a$ ist und r nach außen hin wächst. Wegen des Wertes, den hier l hat [Gl. (3a), S. 157], ist hier

$$dN = \frac{\sqrt{r^2 - e^2\cos^2\vartheta}}{\sqrt{r^2 - e^2}}\,dr,$$

und da es sich um die Fläche $r = a$ handelt, folgt aus (14)

(14a) $$\lim_{r=a}\left(\frac{\sqrt{r^2 - e^2}}{\sqrt{r^2 - e^2\cos^2\vartheta}}\,\frac{\partial V_a}{\partial r}\right) = -4\pi\varkappa$$

oder wegen (13)

(14b) $$-4\pi\varkappa = \frac{C_{00}\sqrt{a^2 - e^2}}{\sqrt{a^2 - e^2\cos^2\vartheta}}\,\frac{1}{Q_0\left(\frac{a}{e}\right)}\left(\frac{d\,Q_0\left(\frac{r}{e}\right)}{dr}\right)_{r=a}.$$

Weiter ist [vgl. (19b), S. 47]

$$Q_0\left(\frac{r}{e}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\frac{r}{e}+1}{\frac{r}{e}-1}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{r+e}{r-e}\right),$$

$$\frac{d\,Q_0\left(\frac{r}{e}\right)}{dr} = \frac{-e}{r^2 - e^2}$$

und

(14c) $$\varkappa = \frac{C_{00} \cdot e}{4\pi Q_0\left(\frac{a}{e}\right)\sqrt{a^2 - e^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \vartheta}}.$$

Der Wert der Konstante C_{00} bestimmt sich aus der Masse M der dem Leiter mitgeteilten freien Elektrizität,

(15) $$M = \iint \varkappa \, d o .$$

Nach S. 5 ist aber das Oberflächenelement der Fläche $r = a$

$$d o = (m n \, d \vartheta \, d \varphi)_{r=a},$$

d. h. wegen der Werte (3a), S. 157 von m und n

$$d o = \sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \vartheta} \sqrt{a^2 - e^2} \sin \vartheta \, d \vartheta,$$

also

(15a) $$M = \frac{C_{00} \, e}{4\pi \, Q_0\left(\frac{a}{e}\right)} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \, d \vartheta = \frac{C_{00} \, e}{Q_0\left(\frac{a}{e}\right)}$$

und

(14d) $$\varkappa = \frac{M}{4\pi \sqrt{a^2 - e^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \vartheta}}.$$

Ferner wird

(12a) $$V_i = \frac{M}{e} Q_0\left(\frac{a}{e}\right),$$

(13a) $$V_a = \frac{M}{e} Q_0\left(\frac{r}{e}\right).$$

Die Resultate für $\varkappa$ sowohl, als für V_i und V_a stimmen mit den allgemeineren, in Teil I, S. 228—234 abgeleiteten überein.

Zunächst hat $\varkappa$ dieselbe Form wie das durch Gleichung (30), S. 234 des ersten Teils bestimmte $\varkappa$. Denn legt man in einem Punkte an das Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2 - e^2} = 1,$$

das die Grenzfläche unseres Leiters bildet, eine Tangential-

ebene, so gilt für die Länge l' des Lotes, das vom Mittelpunkt auf diese Tangentialebene gefällt ist, die Gleichung

$$\frac{1}{l'} = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2 + z^2}{(a^2 - e^2)^2}}.$$

Setzt man darin für x, y, z die Ausdrücke (1), S. 155, in denen $r = a$ zu nehmen ist, so wird

$$l' = \frac{a\sqrt{a^2 - e^2}}{\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \vartheta}},$$

weshalb der Ausdruck (14d) auch so geschrieben werden kann:

$$\text{(14e)} \qquad \varkappa = \frac{M}{4\pi a (a^2 - e^2)} \cdot l'.$$

Das ist aber die Gleichung (30), S. 234 des ersten Teils, nur daß hier das mit l' bezeichnete Lot dort l genannt war, und daß die dort willkürlich anzunehmende Konstante k_0 hier den Wert hat:

$$k_0 = \frac{M}{4\pi a (a^2 - e^2)}.$$

Führt man diesen Wert von k_0 in die an jener Stelle [Teil I, S. 232, Gl. (26a)] abgeleiteten Werte von U_a und U_i ein und setzt zugleich, da es sich hier um verlängerte Rotationsellipsoide handelt, $b = c = \sqrt{a^2 - e^2}$, so lassen sich die dort auftretenden Integrale ausführen, und das dortige U_a geht in V_a, U_i in V_i über.

[Die als untere Grenze des Integrals in U_a auftretende Größe σ hängt mit unserem r so zusammen: $r = \sqrt{a^2 + \sigma}$; denn r sowohl, als $\sqrt{a^2 + \sigma}$ sind die Hauptachsen des durch den angezogenen Punkt gelegten konfokalen Ellipsoids.]

Zusatz 1. Die Aufgabe erforderte, daß V_i für alle Punkte im Innern des Leiters konstant ist. Es genügt, statt dessen die Forderung aufzustellen, daß V_i für alle Punkte der Oberfläche des Leiters, d. i. für $r = a$, einen konstanten Wert hat. Denn soll die Reihe (9a) für $r = a$ konstant, d. h. von ϑ, φ unabhängig sein, so müssen alle Kugelfunktionen für $n > 0$, damit alle $C_{n\nu}, C'_{n\nu}$ für $n > 0$ verschwinden.

Es gilt also auch hier der Satz, daß, wenn das Potential von Massen, die auf der Oberfläche des verlängerten Rotationsellipsoids ausgebreitet sind (und ebenso von solchen, die außerhalb liegen, weil auch für diese der Ausdruck (9a) gilt), auf jener Oberfläche einen konstanten Wert hat, das Potential auch für alle inneren Punkte konstant ist.

Zusatz 2. Die Lösung der allgemeinen Aufgabe der Elektrizitätsverteilung auf unserem Rotationsellipsoid gestaltet sich so. Wirken auf das isoliert aufgestellte leitende Ellipsoid, dem freie Elektrizität mitgeteilt ist, noch gegebene elektrische Kräfte, so sei der Wert derselben an der Oberfläche $F(\vartheta, \varphi)$. Diese Funktion entwickele man nach Kugelfunktionen, so muß die Summe aus $F(\vartheta, \varphi)$ und dem Ausdruck (9a), darin $r=a$ gesetzt, konstant sein. Daraus ergeben sich die Werte aller $C_{n\nu}$, $C'_{n\nu}$. Ferner müssen für $r=a$ die Ausdrücke (9a) und (9b) (S. 160—161) gleich sein, woraus die Werte von $D_{n\nu}, D'_{n\nu}$ folgen, und weiter erhält man $\varkappa$ aus Gleichung (14). Eine spezielle hierhergehörige Aufgabe wird weiterhin behandelt werden.

d) Die reziproke Entfernung zweier Punkte in elliptischen Koordinaten.

Es sei ϱ der Abstand zweier Punkte P, P_1, deren rechtwinklige Koordinaten resp. x, y, z und x_1, y_1, z_1 seien, während r, ϑ, φ und $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$ ihre elliptischen Koordinaten sind, also nach (1)

$$(16)\quad \begin{cases} x = r\cos\vartheta, & x_1 = r_1\cos\vartheta_1, \\ y = \sqrt{r^2-e^2}\sin\vartheta\cos\varphi, & y_1 = \sqrt{r_1^2-e^2}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1, \\ z = \sqrt{r^2-e^2}\sin\vartheta\sin\varphi, & z_1 = \sqrt{r_1^2-e^2}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1, \end{cases}$$

so wird

$$(16\text{a})\quad \begin{aligned} \varrho^2 &= x^2+y^2+z^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2-2(xx_1+yy_1+zz_1) \\ &= r^2+r_1^2-e^2(\sin^2\vartheta+\sin^2\vartheta_1)-2rr_1\cos\vartheta\cos\vartheta_1 \\ &\qquad -2\sqrt{r^2-e^2}\sqrt{r_1^2-e^2}\sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1). \end{aligned}$$

Darin möge

$$(16\text{b})\qquad r > r_1,$$

sein. Diese Bedingung kann durch die andere ersetzt werden: Es existiert ein Wert r_2, so daß $r > r_2, r_1 < r_2$,

d. h. der Punkt P liegt außerhalb, P_1 innerhalb eines gewissen verlängerten Rotationsellipsoids $r = r_2$. Als Funktion von r, ϑ, φ betrachtet, genügt $\frac{1}{\varrho}$ der Laplaceschen Gleichung, und da r einem äußeren Punkte des Rotationsellipsoids r_2 angehört, so gilt für $\frac{1}{\varrho}$ der Ausdruck (9b), S. 161. Die darin enthaltenen, von r, ϑ, φ unabhängigen Größen $D_{n\nu}, D'_{n\nu}$ hängen ihrerseits von $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$ ab, und zwar von φ_1 derart, daß φ und φ_1 nur in der Verbindung $\varphi - \varphi_1$ auftreten, denn, wie (16a) zeigt, kommen φ und φ_1 in $\frac{1}{\varrho}$ nur in dieser Verbindung vor; d. h. es muß in (9b)

$$D_{n\nu} \cos(\nu\varphi) + D'_{n\nu} \sin(\nu\varphi) = E_{n\nu} \cos\nu(\varphi - \varphi_1) + E'_{n\nu} \sin\nu(\varphi - \varphi_1)$$

sein, wo die Größen $E_{n\nu}, E'_{n\nu}$ nur von r_1, ϑ_1 abhängen. Ferner müssen alle $E'_{n\nu}$ verschwinden; denn durch Vertauschung von φ mit φ_1 ändert $\sin\nu(\varphi - \varphi_1)$ sein Vorzeichen, damit würde sich auch $\frac{1}{\varrho}$ ändern, während, wie (16a) lehrt, durch diese Vertauschung $\frac{1}{\varrho}$ sich nicht ändern darf. Demnach muß $\frac{1}{\varrho}$, als Funktion von r, ϑ, φ betrachtet, die Form haben:

$$(17) \quad \frac{1}{\varrho} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} E_{n\nu} Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,\nu}(\cos\vartheta) \cos\nu(\varphi - \varphi_1).$$

Ferner muß $\frac{1}{\varrho}$, als Funktion von $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$ betrachtet, ebenfalls der Laplaceschen Gleichung genügen, und da r_1 einem inneren Punkte des Rotationsellipsoids $r = r_2$ angehört, muß $\frac{1}{\varrho}$ die Form (9a) haben; doch ist (9a) ebenfalls so zu modifizieren, daß eine Vertauschung von φ mit φ_1 $\frac{1}{\varrho}$ sich nicht ändert. Das gibt

$$(18) \quad \frac{1}{\varrho} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} K_{n\nu} P_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right) P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1) \cos\nu(\varphi - \varphi_1),$$

wo die $K_{n\nu}$ von r und ϑ abhängen. Endlich ist zu beachten, daß $\frac{1}{\varrho}$ auch durch Vertauschung von ϑ mit ϑ_1 sich nicht ändert [r und r_1 dürfen nicht vertauscht werden, da $r > r_1$]. Ist $E_{n\nu} = f(r_1, \vartheta_1)$, so muß

$$f(r_1, \vartheta_1) P_{n,\nu}(\cos\vartheta) = f(r_1, \vartheta) P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1)$$

oder

$$\frac{f(r_1, \vartheta_1)}{P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1)} = \frac{f(r_1, \vartheta)}{P_{n,\nu}(\cos\vartheta)}$$

sein. Da die rechte Seite dieser Gleichung von ϑ_1 unabhängig ist, so muß auch die linke Seite von ϑ_1 unabhängig sein, oder

$$E_{n\nu} = f(r_1, \vartheta_1) = P_{n\nu}(\cos\vartheta_1) \,.\, \overline{E}_{n\nu},$$

wo $\overline{E}_{n\nu}$ nur von r_1 abhängt. Ebenso muß

$$K_{n\nu} = P_{n,\nu}(\cos\vartheta) \,.\, \overline{K}_{n\nu}$$

sein, wo $\overline{K}_{n\nu}$ eine Funktion nur von r ist. Wir haben daher einerseits

$$(17\text{a}) \quad \frac{1}{\varrho} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \overline{E}_{n\nu} Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,\nu}(\cos\vartheta) P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1) \cos\nu(\varphi - \varphi_1),$$

andererseits

$$(18\text{a}) \quad \frac{1}{\varrho} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \overline{K}_{n\nu} P_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right) P_{n,\nu}(\cos\vartheta) P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1) \cos\nu(\varphi - \varphi_1).$$

(17a) und (18a) sind zwei nach Kugelfunktionen von ϑ, φ fortschreitende Reihen. Sollen diese für alle ϑ, φ gleich sein, so müssen die Kugelfunktionen gleicher Ordnung in beiden Reihen gleich sein und in den einzelnen Kugelfunktionen die Faktoren jedes Kosinus, d. h.

$$\overline{E}_{n\nu} Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right) = \overline{K}_{n,\nu} P_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right)$$

oder

$$\frac{Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)}{\overline{K}_{n\nu}} = \frac{P_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\overline{E}_{n\nu}}.$$

Hierin ist die rechte Seite von r unabhängig, daher auch die linke, oder jede der beiden Seiten muß derselben Konstante $\frac{1}{H_{n\nu}}$ gleich sein, d. h.

$$\overline{E}_{n\nu}\, Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)=\overline{K}_{n,\nu}\, P_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right)=H_{n\nu}\, Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)P_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right).$$

Somit folgt aus (17a) und (18a), daß $\frac{1}{\varrho}$ folgende Form hat:

$$(19)\quad \frac{1}{\varrho}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} H_{n\nu}\, Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)P_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right)P_{n,\nu}(\cos\vartheta)P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1)\cos\nu(\varphi-\varphi_1).$$

Hiermit ist nur die Form von $\frac{1}{\varrho}$ gefunden. Die Werte der in (19) vorkommenden Konstanten $H_{n\nu}$ ergeben sich aus dem Grenzfall $e=0$, in dem die konfokalen Rotationsellipsoide in konzentrische Kugeln übergehen. Aus (16a) folgt

$$\lim_{e=0}(\varrho^2)=r^2+r_1^2-2rr_1\cos\gamma,\quad \cos\gamma=\cos\vartheta\cos\vartheta_1+\sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1).$$

Daher, da $r>r_1$,

$$(20)\quad \lim_{e=0}\left(\frac{1}{\varrho}\right)=\frac{1}{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\gamma}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_1^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\gamma)$$

oder nach dem Additionstheorem der Kugelfunktionen

$$(20\text{a})\quad \lim_{e=0}\left(\frac{1}{\varrho}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_1^n}{r^{n+1}}\sum_{\nu=0}^{n}h_{n,\nu}P_{n,\nu}(\cos\vartheta)P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1)\cos\nu(\varphi-\varphi_1),$$

worin $h_{n,\nu}$ die durch Gleichung (14), S. 71 bestimmte Konstante ist. Andererseits gibt die Gleichung (19)

$$(19\text{a})\quad \lim_{e=0}\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\lim_{e=0}\left[H_{n\nu}\, Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)P_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right)\right]P_{n,\nu}(\cos\vartheta)P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1)\cos\nu(\varphi-\varphi_1).$$

Für $\lim\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ haben wir damit zwei nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihen; nach dem schon öfter benutzten

Schluß erfordert die Gleichheit beider Reihen, daß die entsprechenden Koeffizienten in beiden gleich sind, oder daß

$$(21)\qquad \lim_{e=0}\left[H_{n\nu}\,Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)P_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right)\right]=\frac{r_1^n}{r^{n+1}}\,h_{n,\nu}$$

ist. Diese Gleichung kann so geschrieben werden:

$$(21\text{a})\qquad \lim_{e=0}\left[H_{n\nu}\cdot e\cdot\left(\frac{r}{e}\right)^{n+1}Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)\cdot\frac{P_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\left(\frac{r_1}{e}\right)^n}\right]=h_{n,\nu}.$$

Nun ist nach den Gleichungen (8) und (9), S. 55, 56

$$\lim_{e=0}\left(\frac{r}{e}\right)^{n+1}Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)=1\,,\quad \lim_{e=0}\frac{P_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\left(\frac{r_1}{e}\right)^n}=1\,,$$

daher muß

$$(22)\qquad \lim_{e=0}(H_{n\nu}\,e)=h_{n,\nu}$$

werden. Aus (21) folgt, daß $H_{n\nu}$ die Form hat:

$$(22\text{a})\qquad H_{n\nu}=\frac{h_{n,\nu}}{e}f_{n\nu}(e)\,,$$

wo $f_{n\nu}(e)$ eine Funktion von e bezeichnet, die für $e=0$ den Wert 1 annimmt. Durch Einsetzen von (22) geht (19) in

$$(23)\qquad \frac{1}{\varrho}=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}h_{n,\nu}f_{n\nu}(e)Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)P_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right)P_{n,\nu}(\cos\vartheta)P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1)\cos\nu(\varphi-\varphi_1)$$

über. Weiter aber folgt aus (16a)

$$\frac{e}{\varrho}=\left[\left(\frac{r}{e}\right)^2+\left(\frac{r_1}{e}\right)^2-\sin^2\vartheta-\sin^2\vartheta_1-2\frac{r}{e}\frac{r_1}{e}\cos\vartheta\cos\vartheta_1\right.$$
$$\left.-2\sqrt{\left(\frac{r}{e}\right)^2-1}\sqrt{\left(\frac{r_1}{e}\right)^2-1}\sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

der Ausdruck $\frac{e}{\varrho}$ enthält also e nur in den Verbindungen $\frac{r}{e}, \frac{r_1}{e}$, sonst nicht; dasselbe muß von dem Ausdruck (23)

für $\frac{e}{\varrho}$ gelten, außerhalb der Verbindungen $\frac{r}{e}, \frac{r_1}{e}$ darf er e nicht enthalten. Daher müssen alle Funktionen $f_{n\nu}(e)$ von e unabhängig sein, oder die $f_{n\nu}(e)$ müssen für beliebige e denselben Wert haben. Für $e=0$ sind alle $f_{n\nu}=1$, also ist auch für beliebige e

$$f_{n\nu}(e)=1.$$

Schließlich wird demnach

$$(24)\quad \frac{1}{\varrho}=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} h_{n,\nu} Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right) P_{n,\nu}(\cos\vartheta) P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1)\cos\nu(\varphi-\varphi_1),$$

worin, wie nochmals bemerkt werden mag, $h_{n,\nu}$ dieselbe Konstante bezeichnet, wie im Additionstheorem der Kugelfunktionen. —

Wäre nicht $r>r_1$, sondern $r<r_1$, so wäre in (24) nur r mit r_1 zu vertauschen. Daß die Reihe für $\frac{1}{\varrho}$ stets konvergiert, folgt aus Abschnitt I, Kapitel 6.

Folgerung 1. Wir wenden die Gleichung (24) auf den speziellen Fall $r_1=e$, $\vartheta_1=0$ an, d. h. wir nehmen an, daß der Punkt $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$ der eine Brennpunkt der konfokalen Rotationsellipsoide ist. Dann ist

$$\varrho^2=r^2+e^2\cos^2\vartheta-2re\cos\vartheta=(r-e\cos\vartheta)^2.$$

Ferner hat $P_{n,\nu}(x)$ den Faktor $\sqrt{(x^2-1)^\nu}$, es wird also

$$P_{n,\nu}(1)=0 \text{ für } \nu>0,$$

und in (24) verschwinden alle Summanden für $\nu>0$. Die Doppelsumme reduziert sich auf eine einfache Summe, und (24) geht in

$$(25)\quad \frac{e}{r-e\cos\vartheta}=\sum_{n=0}^{\infty} h_{n,0}\, Q_{n,0}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,0}(\cos\vartheta)\,[P_{n,0}(1)]^2$$

über. Drückt man $P_{n,0}(\cos\vartheta)$ durch $P_n(\cos\vartheta)$, $P_{n,0}(1)$ durch $P_n(1)=1$ aus [Gl. (2c), S. 54], $Q_{n,0}\left(\frac{r}{e}\right)$ durch $Q_n\left(\frac{r}{e}\right)$ [Gl. (10), S. 56] und setzt für $h_{n,0}$ seinen Wert ein [Gl. (14), S. 71], so folgt

$$(25\text{a})\qquad \frac{e}{r - e\cos\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, Q_n\left(\frac{r}{e}\right) P_n(\cos\vartheta)$$

oder

$$(25\text{b})\qquad \frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, Q_n(y)\, P_n(x)$$
$$(y > 1,\ x^2 \leqq 1);$$

und auch diese Reihe konvergiert unter den angegebenen Bedingungen für y und x stets aus demselben Grunde wie die Reihe (24).

Multipliziert man die Gleichung (25b) mit $P_n(x)$ und integriert nach x zwischen den Grenzen -1 und $+1$, so folgt aus den Integralsätzen für $P_n(x)$

$$(26)\qquad Q_n(y) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)\,dx}{y-x} \qquad (y > 1).$$

Das ist das F. Neumannsche Integral für $Q_n(y)$. Die Richtigkeit der Gleichung (26) kann man auch direkt mittels der Differentialgleichung der Kugelfunktionen nachweisen. Ferner lassen sich aus (26) die S. 47, 48 angegebenen Rekursionsformeln für Q_n ableiten, ebenso die Gleichung (19a), S. 47. Setzt man nämlich in (26) $P_n(x) = P_n(y) - [P_n(y) - P_n(x)]$, so wird

$$Q_n(y) = \frac{1}{2} P_n(y) \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{y-x} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(y) - P_n(x)}{y-x}\,dx.$$

$P_n(y) - P_n(x)$ ist durch $y - x$ teilbar und gibt, dadurch geteilt, eine ganze Funktion der Ordnung $n-1$ von y und x, also nach Ausführung der Integration nach x eine ganze Funktion $(n-1)$-ter Ordnung von y; und das erste Integral hat den Wert $\log\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$.

Folgerung 2. Für $r_1 = e$, $\vartheta_1 = \frac{1}{2}\pi$, d. h. für den Abstand des Punktes r, ϑ, φ vom Anfangspunkte ergibt sich ebenso

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - e^2 \sin^2\vartheta}} = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty} (4n+1)\, P_{2n}(0)\, Q_{2n}\left(\frac{r}{e}\right) P_{2n}(\cos\vartheta).$$

e) Weitere Anwendungen.

I. Mittels des Ausdrucks (24) kann man die Wirkung eines verlängerten Rotationsellipsoids berechnen, wenn entweder auf seiner Oberfläche oder in seinem Innern Massen von gegebener Dichtigkeit ausgebreitet sind. Man braucht nur ebenso zu verfahren wie in Abschnitt II, Kap. 1 und 2 bei den analogen Aufgaben für die Kugel. Man hat dabei an Stelle der Gleichungen (3a) und (3b), S. 98 die obige Gleichung (24), resp. die aus ihr durch Vertauschung von r mit r_1 entstehende zu nehmen, und entsprechend ist das Flächenelement, resp. das Volumenelement durch elliptische Koordinaten auszudrücken. Es soll das angewandt werden, um für ein schon bekanntes Resultat eine neue Ableitung zu geben.

Es soll das Potential der Anziehung bestimmt werden, die das verlängerte Rotationsellipsoid $r=a$ auf einen äußeren Punkt ausübt, falls es mit Masse von konstanter Dichtigkeit k gefüllt ist.

Sind r, ϑ, φ die elliptischen Koordinaten des angezogenen, $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$ die eines inneren Punktes, so wird das Volumenelement [vgl. (7), S. 5 und (3a), S. 157]

$$dv = l m n \, d r_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1 = (r_1^2 - e^2 \cos^2 \vartheta_1) \, d r_1 \sin \vartheta_1 \, d \vartheta_1 \, d \varphi_1 ,$$

daher

$$V = k \int\!\!\int\!\!\int \frac{(r_1^2 - e^2 \cos^2 \vartheta_1) \sin \vartheta_1 \, d r_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1}{\varrho}, \tag{27}$$

und zwar ist nach ϑ_1 von 0 bis π, nach φ_1 von 0 bis 2π, nach r_1 von $r_1 = e$ bis $r_1 = a$ zu integrieren. Für $\frac{1}{\varrho}$ ist, da $r > a, r_1 < a$, die Reihe (24) zu setzen. Führt man zunächst die Integration nach φ_1 aus, so wird

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1}{\varrho} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} h_{n,\nu} \, Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right) P_{n,\nu}(\cos\vartheta) P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1) \int_0^{2\pi} \cos\nu(\varphi - \varphi_1) \, d\varphi_1 .$$

Darin verschwinden alle Integrale, in denen $\nu > 0$, so daß rechts die einfache Summe

$$\frac{2\pi}{e}\sum_{n=0}^{\infty} h_{n,0}\, Q_{n,0}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,0}\left(\frac{r_1}{e}\right) P_{n,0}(\cos\vartheta)\, P_{n,0}(\cos\vartheta_1)$$

übrigbleibt. Drückt man die Funktion $P_{n,0}$ durch P_n, $Q_{n,0}$ durch Q_n aus (vgl. oben) und setzt für $h_{n,0}$ seinen Wert, so wird

$$(28)\quad \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi_1}{\varrho} = \frac{2\pi}{e}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\, Q_n\left(\frac{r}{e}\right) P_n\left(\frac{r_1}{e}\right) P_n(\cos\vartheta) P_n(\cos\vartheta_1).$$

Multipliziert man diese Reihe mit

$$(r_1^2 - e^2\cos^2\vartheta_1)\sin\vartheta_1$$
$$= \left[\left(r_1^2 - \frac{1}{3}e^2\right)P_0(\cos\vartheta_1) - \frac{2}{3}e^2 P_2(\cos\vartheta_1)\right]\sin\vartheta_1$$

und integriert nach ϑ_1 zwischen den Grenzen 0 und π, so verschwinden alle Integrale, die das Produkt von Kugelfunktionen mit ungleichen Indizes enthalten. Es bleiben nur die Integrale

$$\int_0^{\pi} P_0(\cos\vartheta_1)\, P_0(\cos\vartheta_1)\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1 = 2,$$

$$\int_0^{\pi} P_2(\cos\vartheta_1)\, P_2(\cos\vartheta_1)\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1 = \frac{2}{5},$$

und da $P_0(x) = 1$ ist, so wird

$$(29)\quad \int_0^{\pi}(r_1^2 - e^2\cos^2\vartheta_1)\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi_1}{\varrho}$$
$$= \frac{4\pi}{e}\left\{\left(r_1^2 - \frac{1}{3}e^2\right)Q_0\left(\frac{r}{e}\right) - \frac{2}{3}e^2\, Q_2\left(\frac{r}{e}\right)P_2\left(\frac{r_1}{e}\right)P_2(\cos\vartheta)\right\}.$$

Weiter ist nach r_1 zwischen den Grenzen e und a zu integrieren, so daß, da

$$\frac{2}{3}e^2 P_2\left(\frac{r_1}{e}\right)=r_1^2-\frac{1}{3}e^2$$

ist,

$$(30)\quad V=\frac{4}{3}\frac{\pi k}{e}a(a^2-e^2)\left\{Q_0\left(\frac{r}{e}\right)-Q_2\left(\frac{r}{e}\right)P_2(\cos\vartheta)\right\}$$

wird, oder auch, wenn man für $Q_0\left(\frac{r}{e}\right)$, $Q_2\left(\frac{r}{e}\right)$ die Ausdrücke (19b), S. 47 und für $P_2(\cos\vartheta)$ seinen Wert aus (4a), S. 13 setzt,

$$(30\text{a})\quad V=\frac{\pi k a(a^2-e^2)}{e}\left\{\frac{1}{2}\log\left(\frac{r+e}{r-e}\right)\left[2-\frac{2r^2\cos^2\vartheta}{e^2}+\frac{(r^2-e^2)\sin^2\vartheta}{e^2}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{r(2\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta)}{e}\right\}.$$

Dieser Ausdruck für V stimmt genau mit dem Ausdruck für V_a in Teil I, S. 213, Gleichung (29) überein, wenn man statt der dortigen Bezeichnung die jetzige einführt, nämlich, wie S. 166, $\sqrt{a^2+\sigma}=r$ setzt, ferner $c^2=a^2-e^2$, und wenn man die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z des angezogenen Punktes durch seine elliptischen Koordinaten r, ϑ, φ [Gl. (1), S. 155] ausdrückt.

Auch das Potential der Anziehung, die unser Rotationsellipsoid auf einen Punkt der Masse (inneren Punkt) ausübt, kann in derselben Weise berechnet werden, man muß nur, da $r<a$, bei der Integration nach r_1 das Integral teilen:

$$\int_e^a dr_1()=\int_e^r dr_1()+\int_r^a dr_1()$$

und hat in dem ersten dieser Teilintegrale für $\frac{1}{\varrho}$ die Reihe (24) zu setzen, im zweiten dagegen die Reihe, die aus (24) durch Vertauschung von r und r_1 entsteht. So erhält man

$$V=\frac{4\pi k}{e}\left\{Q_0\left(\frac{r}{e}\right)\int_e^r\left(r_1^2-\frac{1}{3}e^2\right)d r_1-\frac{2}{3}e^2 Q_2\left(\frac{r}{e}\right)P_2(\cos\vartheta)\int_e^r P_2\left(\frac{r_1}{e}\right)d r_1\right.$$
$$\left.+\int_r^a\left(r_1^2-\frac{1}{3}e^2\right)Q_0\left(\frac{r_1}{e}\right)d r_1-\frac{2}{3}e^2 P_2\left(\frac{r}{e}\right)P_2(\cos\vartheta)\int_r^a Q_2\left(\frac{r_1}{e}\right)d r_1\right\}$$

und nach Ausführung der Integrationen

$$(31)\quad V=\frac{4\pi k}{3e}a(a^2-e^2)\,Q_0\left(\frac{a}{e}\right)\left[1-P_2\left(\frac{r}{e}\right)P_2(\cos\vartheta)\right]$$
$$+2\pi k\left[\frac{a^2-r^2}{3}+P_2(\cos\vartheta)\left(\frac{a^2r^2}{e^2}-\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}r^2\right)\right].$$

Die Übereinstimmung des Ausdrucks (31) mit dem Ausdruck (29) in Bd. I, S. 213, falls man im letzteren $\sigma=0$ setzt, kann ähnlich wie oben nachgewiesen werden.

Bemerkung. Zur Berechnung des Potentials unseres Rotationsellipsoids bei nichtkonstanter Dichtigkeit k muß man $k\,(r_1^2-e^2\cos^2\vartheta_1)$ nach Kugelfunktionen entwickeln und die Integralsätze I und II der allgemeinen Kugelfunktionen anwenden. Bei Belegung der Oberfläche des Rotationsellipsoids $r=a$ mit Masse von der Dichtigkeit k ist $k\sqrt{a^2-e^2\cos^2\vartheta_1}$ nach Kugelfunktionen zu entwickeln.

II. Es soll die Elektrizitätsverteilung auf einem leitenden, isoliert aufgestellten verlängerten Rotationsellipsoid bestimmt werden, falls dasselbe unter dem Einfluß eines äußeren induzierenden Punktes steht, der auf der Rotationsachse liegt.

Der induzierende äußere Punkt A habe die Masse μ, sein Abstand r_0 vom Mittelpunkte des gegebenen Rotationsellipsoids ist größer als die halbe große Achse a des letzteren. Das Potential der gegebenen äußeren Kräfte ist hier

$$(32)\qquad U=\frac{\mu}{\varrho},$$

wo ϱ der Abstand eines inneren Punktes (r,ϑ,φ) von A ist. Für den Abstand des inneren Punktes von einem

beliebigen äußeren Punkte $r_0, \vartheta_0, \varphi_0$ ist, da $r_0 > a, r < a$, nach (24)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} h_{n,\nu} Q_{n,\nu}\left(\frac{r_0}{e}\right) P_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,\nu}(\cos\vartheta_0) P_{n,\nu}(\cos\vartheta) \cos\nu(\varphi - \varphi_0).$$

Für den Punkt A, der auf der Achse liegt, ist $\vartheta_0 = 0$, und da $P_{n,\nu}(1) = 0$ für $\nu > 0$ ist, so verschwinden in der inneren Summe alle Summanden für $\nu > 0$. Drückt man ferner, wie schon oben, $Q_{n,0}$ und $P_{n,0}$ durch Q_n, P_n aus, so wird in (32)

$$\text{(32a)} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n\left(\frac{r_0}{e}\right) P_n\left(\frac{r}{e}\right) P_n(\cos\vartheta).$$

Ferner sei das Potential der Oberflächenladung für innere Punkte V_i, für äußere V_a, so muß

$$V_i + U = C$$

sein, also

$$\text{(33)} \quad V_i = C - \frac{\mu}{e} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n\left(\frac{r_0}{e}\right) P_n\left(\frac{r}{e}\right) P_n(\cos\vartheta);$$

speziell wird für Punkte der Oberfläche $(r = a)$

$$\text{(33a)} \quad (V_i)_{r=a} = C - \frac{\mu}{e} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n\left(\frac{r_0}{e}\right) P_n\left(\frac{a}{e}\right) P_n(\cos\vartheta).$$

Andererseits gilt für V_a die Gleichung (9b), und die allgemeinen Eigenschaften des Flächenpotentials erfordern, daß V_i und V_a für $r = a$ gleich werden, daß also der Ausdruck (9b), S. 161, darin $r = a$ gesetzt, gleich dem Ausdruck (33a) ist. Beide Ausdrücke sind Reihen, die nach Kugelfunktionen fortschreiten, mithin müssen die Kugelfunktionen jeder Ordnung und in diesen die Koeffizienten der einzelnen Glieder gleich sein. Da der Ausdruck (33a) von φ unabhängig ist, müssen daher in unserem Falle alle Koeffizienten $D_{n\nu}$, $D'_{n\nu}$ für $\nu > 0$ verschwinden, und es bleibt

$$(34)\quad D_{n0}\, Q_{n,0}\left(\frac{a}{e}\right) P_{n,0}(\cos\vartheta)$$
$$= -\frac{\mu}{e}(2n+1)\, Q_n\left(\frac{r_0}{e}\right) P_n\left(\frac{a}{e}\right) P_n(\cos\vartheta) \quad (n > 0),$$

dagegen

$$(34\text{a})\quad D_{0\,0}\, Q_{0,0}\left(\frac{a}{e}\right) P_{0,0}(\cos\vartheta)$$
$$= C - \frac{\mu}{e} Q_0\left(\frac{r_0}{e}\right) P_0\left(\frac{a}{e}\right) P_0(\cos\vartheta).$$

Drückt man $P_{n,0}$ und $Q_{n,0}$ durch P_n und Q_n aus [Gl. (2c), S. 54 und (10), S. 56], so geht die Gleichung (34) in

$$(35)\quad D_{n0}(2n+1)\, Q_n\left(\frac{a}{e}\right) P_n(\cos\vartheta)$$
$$= -\frac{\mu}{e}(2n+1)\, Q_n\left(\frac{r_0}{e}\right) P_n\left(\frac{a}{e}\right) P_n \cos\vartheta)$$

über, die Gleichung (34a) aber, da $Q_{0,0}(x) = Q_0(x)$, $P_{0,0}(x) = P_0(x) = 1$, in

$$(35\text{a})\quad D_{0\,0}\, Q_0\left(\frac{a}{e}\right) = C - \frac{\mu}{e} Q_0\left(\frac{r_0}{e}\right).$$

Damit sind in dem Ausdruck (9b) für V_a alle Koeffizienten D, D' bestimmt, und es wird

$$(36)\quad V_a = \frac{C - \frac{\mu}{e} Q_0\left(\frac{r_0}{e}\right)}{Q_0\left(\frac{a}{e}\right)} Q_{0,0}\left(\frac{r}{e}\right)$$
$$-\frac{\mu}{e}\sum_{n=1}^{\infty} Q_{n,0}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,0}(\cos\vartheta)\, \frac{Q_n\left(\frac{r_0}{e}\right)}{Q_n\left(\frac{a}{e}\right)} P_n\left(\frac{a}{e}\right)$$

oder, da

$$Q_{n,0}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,0}(\cos\vartheta) = (2n+1)\, Q_n\left(\frac{r}{e}\right) P_n(\cos\vartheta),$$
$$Q_{0,0}\left(\frac{r}{e}\right) = Q_0\left(\frac{r}{e}\right)$$

ist,

(36a)
$$V_a = C\cdot\frac{Q_0\left(\frac{r}{e}\right)}{Q_0\left(\frac{a}{e}\right)} - \frac{\mu}{e}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,Q_n\left(\frac{r_0}{e}\right)\frac{Q_n\left(\frac{r}{e}\right)}{Q_n\left(\frac{a}{e}\right)}P_n\left(\frac{a}{e}\right)P_n(\cos\vartheta).$$

Aus (33) und (36a) ergibt sich die Dichtigkeit $\varkappa$ der elektrischen Ladung der Oberfläche, wie Seite 164, mittels der Formel

$$\lim_{r=a}\left(\frac{\partial V_a}{\partial N} - \frac{\partial V_i}{\partial N}\right) = -4\pi\varkappa,$$

worin wieder

$$d\,N = \frac{\sqrt{r^2 - e^2\cos^2\vartheta}}{\sqrt{r^2 - e^2}}\,d\,r$$

ist, d. h. mittels der Formel

(37)
$$\frac{-4\pi\varkappa\sqrt{a^2 - e^2\cos^2\vartheta}}{\sqrt{a^2 - e^2}} = \lim_{r=a}\left(\frac{\partial V_a}{\partial r} - \frac{\partial V_i}{\partial r}\right),$$

so daß nach Ausführung der Differentiationen

(38)
$$\frac{-4\pi\varkappa\sqrt{a^2 - e^2\cos^2\vartheta}}{\sqrt{a^2 - e^2}}$$
$$= \frac{C}{e}\,\frac{Q'_0\left(\frac{a}{e}\right)}{Q_0\left(\frac{a}{e}\right)} - \frac{\mu}{e^2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,\frac{Q_n\left(\frac{r_0}{e}\right)}{Q_n\left(\frac{a}{e}\right)}P_n(\cos\vartheta)$$
$$\cdot\left[Q'_n\left(\frac{a}{e}\right)P_n\left(\frac{a}{e}\right) - Q_n\left(\frac{a}{e}\right)P'_n\left(\frac{a}{e}\right)\right]$$

wird, worin $Q'_n(x)$ den Differentialquotienten von $Q_n(x)$, $P'_n(x)$ den von $P_n(x)$ bezeichnet. Das Resultat vereinfacht sich noch durch Anwendung der Formel (22), S. 48, nach der

$$Q'_n\left(\frac{a}{e}\right)P_n\left(\frac{a}{e}\right) - Q_n\left(\frac{a}{e}\right)P'_n\left(\frac{a}{e}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{a}{e}\right)^2 - 1}$$

ist. Schließlich wird demnach

$$(39)\quad \frac{-4\pi\varkappa\sqrt{a^2-e^2\cos^2\vartheta}}{\sqrt{a^2-e^2}} = \frac{C}{e}\,\frac{Q'_0\left(\frac{a}{e}\right)}{Q_0\left(\frac{a}{e}\right)} + \frac{\mu}{a^2-e^2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{Q_n\left(\frac{r_0}{e}\right)}{Q_n\left(\frac{a}{e}\right)}P_n(\cos\vartheta).$$

Zur Bestimmung der Konstante C dient, wie früher, die Masse M freier Elektrizität, die dem Leiter mitgeteilt ist. Es ist

$$M = \iint \varkappa\, d\,o = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \varkappa\sqrt{a^2-e^2\cos^2\vartheta}\,\sqrt{a^2-e^2}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\,,$$

oder, da

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n(\cos\vartheta)\sin d\vartheta\, d\varphi = 0 \qquad (n>0)$$

ist,

$$(40)\qquad M = -\frac{C}{e}\,(a^2-e^2)\frac{Q'_0\left(\frac{a}{e}\right)}{Q_0\left(\frac{a}{e}\right)} - \mu\frac{Q_0\left(\frac{r_0}{e}\right)}{Q_0\left(\frac{a}{e}\right)}.$$

Wäre das Rotationsellipsoid nicht isoliert aufgestellt, sondern mit der Erde leitend verbunden, so wäre $C=0$; M würde in diesem Falle die Gesamtmasse der auf dem Ellipsoid bleibenden, nicht zur Erde abgeleiteten Elektrizität sein.

Kapitel 2.

Abgeplattetes Rotationsellipsoid.

a) Einführung zweckmäßiger Variabler.

Setzt man

$$(1)\qquad \begin{cases} x = r\cos\vartheta\,, \\ y = \sqrt{r^2+e^2}\sin\vartheta\cos\varphi\,, \\ z = \sqrt{r^2+e^2}\sin\vartheta\sin\varphi\,, \end{cases}$$

so erhält man durch Elimination von ϑ, φ

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2 + z^2}{r^2 + e^2} = 1, \tag{2}$$

d. h. die Flächen $r = \text{Const}$ sind abgeplattete Rotationsellipsoide, deren Polarhalbachse r ist, während der Äquatorialradius $\sqrt{r^2 + e^2}$ ist. Ferner folgt aus (1)

$$\frac{-x^2}{e^2 \cos^2 \vartheta} + \frac{y^2 + z^2}{e^2 \sin^2 \vartheta} = 1, \tag{2a}$$

d. h. die Flächen $\vartheta = \text{Const}$ sind einschalige Rotationshyperboloide. Die Ellipsen und Hyperbeln, durch deren Rotation um die Nebenachse die Flächen (2) und (2a) entstehen, haben sämtlich dieselben Brennpunkte; und bei der Rotation beschreiben diese gemeinsamen Brennpunkte den Fokalkreis $x = 0, y^2 + z^2 = e^2$.

Die dritte Flächenschar

$$z = y \operatorname{tg} \varphi \tag{2b}$$

wird von den Ebenen gebildet, die durch die Rotationsachse gelegt sind. Daß die drei Flächenscharen orthogonal sind, ergibt sich unmittelbar daraus, daß die rotierenden Kurven sich senkrecht schneiden, und daß die Normalen von Rotationsflächen in den Meridianebenen liegen.

Um alle Punkte des Raumes zu erhalten, muß man r von 0 bis ∞ variieren lassen, ϑ von 0 bis π, φ von 0 bis 2π. Dann gehört auch jedem Punkte des Raumes im allgemeinen nur ein Wertsystem r, ϑ, φ an; jedoch mit einer Ausnahme.

Für $r = 0$ ergibt sich aus (1)

$$x = 0, \quad y = e \sin \vartheta \cos \varphi, \quad z = e \sin \vartheta \sin \varphi. \tag{1a}$$

Dadurch werden alle Punkte innerhalb des Fokalkreises dargestellt, für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ die Punkte des Fokalkreises selbst. Zwei Werte ϑ und $\pi - \vartheta$ ergeben hier denselben Punkt innerhalb des Fokalkreises. Die Fläche dieses Kreises muß als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid angesehen werden, dessen Rotationsachse verschwindet, daher wird die Kreisebene doppelt bedeckt.

Für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ geht, wie aus (1) folgt, das Rotationshyperboloid (2a) in die Rotationsachse über, und zwar ergibt sich für $\vartheta = 0$ der positive, für $\vartheta = \pi$ der negative Teil der Achse. Für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ geht das Hyperboloid (2a) in den Teil der yz-Ebene über, der außerhalb des Fokalkreises liegt. Die Werte ϑ und $\pi - \vartheta$ gehören demselben Hyperboloid an, derart, daß zu $\vartheta < \frac{1}{2}\pi$ der Teil der Fläche gehört, für dessen Punkte x positiv, zu $\pi - \vartheta$ der Teil, für dessen Punkte x negativ ist. Der Übergang von einem Teile zum anderen geschieht innerhalb des Fokalkreises, zu dessen einzelnen Punkten ja, wie schon angegeben, supplementäre Werte von ϑ gehören.

Auch diese Variabeln r, ϑ, φ sind Spezialfälle der elliptischen Koordinaten.

b) Transformation und Lösung der Laplaceschen Gleichung.

Für unsere Variabeln wird

$$(3)\quad \begin{cases} l = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \frac{\sqrt{r^2 + e^2\cos^2\vartheta}}{\sqrt{r^2 + e^2}}, \\ m = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right)^2} = \sqrt{r^2 + e^2\cos^2\vartheta}, \\ n = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{r^2 + e^2}\sin\vartheta, \end{cases}$$

so daß

$$(4)\quad \Delta V = \frac{1}{r^2 + e^2\cos^2\vartheta} \cdot \left\{ \frac{\partial (r^2 + e^2)\frac{\partial V}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial \sin\vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \left(\frac{1}{\sin^2\vartheta} - \frac{e^2}{r^2 + e^2}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right\}$$

wird. Alle diese Formeln unterscheiden sich von den entsprechenden Formeln des vorigen Kapitels nur dadurch, daß das dort auftretende $-e^2$ hier durch $+e^2$ ersetzt ist.

Setzt man weiter, um eine Lösung der Gleichung $\Delta V=0$ zu erhalten, die überall eindeutig, endlich und stetig ist, wie in Kapitel 1

$$V=V_1 V_2 V_3, \tag{5}$$

wo V_1 nur von r, V_2 nur von ϑ, V_3 nur von φ abhängt, so ergeben sich fur V_2 und V_3 genau dieselben Werte wie dort (S. 159, 160), nämlich

$$V_2=B\,P_{n,\nu}(\cos\vartheta),\quad V_3=D\cos(\nu\varphi)+D'\sin(\nu\varphi); \tag{5a}$$

darin sind n und ν ganze Zahlen und zwar $n\geqq\nu$. Für V_1 aber erhält man hier die Gleichung

$$\frac{d(r^2+e^2)\dfrac{dV_1}{dr}}{dr}-\left(n(n+1)-\frac{\nu^2e^2}{r^2+e^2}\right)V_1=0. \tag{5b}$$

Führt man hierin an Stelle von r als unabhängige Variable

$$\lambda=\frac{ir}{e} \tag{6}$$

ein, so geht (5b) in die Gleichung (8a), S. 160 über. Ihre Lösung ist

$$V_1=A\,P_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right)+B\,Q_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right). \tag{7}$$

Das Auftreten imaginärer Größen ergibt keineswegs ein imaginäres Resultat. Es ist nämlich

$$P_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right)=\sqrt{-\frac{r^2}{e^2}-1}^{\,\nu}\left\{\left(\frac{ir}{e}\right)^{n-\nu}-\frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{2\cdot(2n-1)}\left(\frac{ir}{e}\right)^{n-\nu-2}+\cdots\right\}$$

$$=i^n\sqrt{\frac{r^2}{e^2}+1}^{\,\nu}\left\{\left(\frac{r}{e}\right)^{n-\nu}+\frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{2\cdot(2n-1)}\left(\frac{r}{e}\right)^{n-\nu-2}+\cdots\cdots\right\}.$$

Hier stehen in der Klammer nur reelle Größen, ebenso ist die Quadratwurzel reell, und für gerade n ist $i^n=\pm1$, daher $P_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right)$ reell. Für ungerade n hat $P_{n,\nu}$ den Faktor $\pm i$; man braucht in diesem Falle der willkürlichen Konstante A nur einen rein imaginären Wert zu erteilen, so

ist $A P_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right)$ reell. Ähnlich ist es bei $Q_{n,\nu}$, das für gerade n den Faktor $\pm i$ hat, für ungerade n reell ist. In der imaginären Form ist somit eine reelle Lösung enthalten.

Aus der so gewonnenen partikulären Lösung ergibt sich die allgemeine ebenso wie S. 160 ff. Dabei sind folgende Fälle zu unterscheiden:

I. Es handle sich um den Raum außerhalb eines gegebenen Rotationsellipsoids $r = a$; dann geht r von a bis ∞. Für $r = \infty$ muß V verschwinden, $A P_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right)$ aber wird als reelle ganze, mit $\sqrt{\frac{r^2}{e^2}+1}^{\,\nu}$ multiplizierte Funktion von $\frac{r}{e}$ für $r = \infty$ selbst ∞, daher muß $A = 0$ sein, und es ergibt sich als allgemeine Lösung der Ausdruck

$$(8)\quad V_a = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} Q_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right) P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\,[(D_{n\nu}\cos(\nu\varphi) + D'_{n\nu}\sin(\nu\varphi)].$$

II. Handelt es sich um den Raum innerhalb des Rotationsellipsoids $r = a$, so trifft der Grund, aus dem S. 160 $Q_{n,\nu}$ fortfallen mußte, hier nicht mehr zu. Dort konnte für innere Punkte das Argument der Funktion $Q_{n,\nu}$ den Wert 1 annehmen, für den $Q_{n,\nu}$ unendlich wird. Dagegen ist hier das Argument von $Q_{n,\nu}$ rein imaginär; es kann alle rein imaginären Werte annehmen von 0 bis $\frac{ia}{e}$, darunter ev. auch den Wert i; aber $Q_{n,\nu}(i)$ ist nicht unendlich, sondern endlich, ebenso $Q_{n,\nu}(0)$, wie weiterhin erörtert werden wird.

Zunächst erhalten wir daher sowohl für den Raum innerhalb eines gegebenen Rotationsellipsoids, als für den Raum zwischen zwei konfokalen Rotationsellipsoiden als allgemeine Lösung der Gleichung $\Delta V = 0$:

$$(9)\quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\Big[\cos(\nu\varphi)\Big(C_{n\nu} P_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right) + D_{n\nu} Q_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right)\Big)$$
$$+ \sin(\nu\varphi)\Big(C'_{n\nu} P_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right) + D'_{n\nu} Q_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right)\Big)\Big].$$

Scheinbar geht hier die Analogie mit dem verlängerten Rotationsellipsoide verloren; aber nur scheinbar. Auch hier müssen für Punkte innerhalb eines gegebenen Rotationsellipsoids $D_{n\nu}$ und $D'_{n\nu}$ verschwinden, wenn auch aus einem andern Grunde als in Kapitel 1. Würden nämlich $D_{n\nu}$ und $D'_{n\nu}$ nicht verschwinden, so würde zwar nicht V selbst, aber seine Differentialquotienten in gewissen Punkten unendlich werden, während auch diese endlich bleiben müssen. Um das zu zeigen, betrachten wir die partikuläre Lösung

$$(10)\quad V=\left[C P_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right)+D\,Q_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right)\right] P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\cos\nu\varphi$$

(worin der Kürze halber die Indizes vor C und D fortgelassen sind) und differentiieren diese einmal nach der Normale N irgendeines der konfokalen Rotationsellipsoide (2), zweitens nach der Normale N_1 eines der konfokalen einschaligen Rotationshyperboloide (2a), so wird, da $dN=l\,dr$, $dN_1=m\,d\vartheta$ ist,

$$(11)\quad \frac{\partial V}{\partial N}=\left[C P'_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right)+D Q'_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right)\right]\frac{i}{e}\frac{\sqrt{r^2+e^2}}{\sqrt{r^2+e^2\cos^2\vartheta}}P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\cos(\nu\varphi),$$

$$(12)\quad \frac{\partial V}{\partial N_1}=\left[C P_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right)+D Q_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right)\right]\frac{d P_{n,\nu}(\cos\vartheta)}{d\vartheta}\frac{1}{\sqrt{r^2+e^2\cos^2\vartheta}}\cos(\nu\varphi).$$

Diesen Ausdruck wenden wir auf den speziellen Fall $\vartheta=\frac{1}{2}\pi$, d.h. auf Punkte der yz-Ebene an. Ist $n-\nu$ ungerade, so wird $P_{n,\nu}(0)=0$, da die Reihe für $P_{n,\nu}(\cos\vartheta)$ nur ungerade Potenzen von $\cos\vartheta$ enthält; dagegen ist $\frac{\partial P_{n,\nu}(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}$ für $\vartheta=\frac{1}{2}\pi$ nicht $=0$. Umgekehrt verhält es sich, wenn $n-\nu$ gerade ist. Also für ungerade $n-\nu$ verschwindet der Ausdruck (11), für gerade $n-\nu$ der Ausdruck (12), sobald $\vartheta=\frac{1}{2}\pi$ wird. Dagegen verschwindet (11) nicht für gerade, (12) nicht für ungerade $n-\nu$, sondern es wird

für $\vartheta=\frac{1}{2}\pi$, $n-\nu$ gerade

$$(11a)\quad \frac{\partial V}{\partial N}=\left[C P'_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right)+D Q'_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right)\right]\frac{i}{e}\frac{\sqrt{r^2+e^2}}{r}P_{n,\nu}(0)\cos(\nu\varphi),$$

dagegen für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, $n-\nu$ ungerade

$$(12\text{a}) \quad \frac{\partial V}{\partial N_1} = \left[C P_{n,\nu}\left(\frac{i r}{e}\right) + D Q_{n,\nu}\left(\frac{i r}{e}\right)\right]\left(\frac{d P_{n,\nu}(\cos\vartheta)}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\frac{1}{2}\pi} \cdot \frac{1}{r}\cos(\nu\varphi).$$

Geht man nun von $r > 0$ zu $r = 0$ über, d. h. von Punkten der yz-Ebene außerhalb des Fokalkreises zu Punkten des Fokalkreises, so wird, da $Q_{n,\nu}(0)$ und $Q'_{n,\nu}(0)$ von Null verschieden sind, $\dfrac{Q'_{n,\nu}\left(\frac{i r}{e}\right)}{r}$ in (11a) und $\dfrac{Q_{n,\nu}\left(\frac{i r}{e}\right)}{r}$ in (12a) für Punkte des Fokalkreises unendlich groß, während $\dfrac{P'_{n,\nu}\left(\frac{i r}{e}\right)}{r}$ in (11a) und $\dfrac{P_{n,\nu}\left(\frac{i r}{e}\right)}{r}$ in (12a) auch für diese Punkte endlich bleiben, da im ersten Falle $P'_{n,\nu}$, im zweiten $P_{n,\nu}$ nur ungerade Potenzen von $\frac{r}{e}$, einschließlich der ersten, enthält. Für Punkte des Fokalkreises würde also entweder $\frac{\partial V}{\partial N}$ oder $\frac{\partial V}{\partial N_1}$ unendlich groß werden, falls nicht D verschwindet; und dasselbe gilt für alle partikulären Integrale, also für alle Glieder der Reihe (9). Sobald es sich daher um einen Raum handelt, der den Fokalkreis enthält, d. h. für das Innere des Rotationsellipsoids $r = a$, muß V die Form haben:

$$(9\text{a}) \quad V_i = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} P_{n,\nu}\left(\frac{i r}{e}\right) P_{n,\nu}(\cos\vartheta)[C_{n\nu}\cos(\nu\varphi) + C'_{n\nu}\sin(\nu\varphi)],$$

während für den Raum zwischen zwei konfokalen Rotationsellipsoiden die Formel (9) gilt.

Zusatz. Bei obiger Argumentation ist benutzt, daß die Funktionen $Q_{n,\nu}$ und $Q'_{n,\nu}$ für das Argument 0 nicht verschwinden. Für die einfachen Kugelfunktionen zweiter Art ergibt sich das so: Nach den Formeln (19b), S. 47 ist $Q_0(0) = \frac{1}{2}\log(-1)$, $Q_1(0) = -1$, und die Rekursionsformel (20), S. 47 zeigt, daß, wenn $Q_{n-1}(0)$ von 0 verschieden und $Q_n(0)$ endlich ist, auch $Q_{n+1}(0)$ nicht $= 0$ ist. Ebenso folgt aus den genannten Formeln $Q'_0(0) = +1$, $Q'_1(0) = \frac{1}{2}\log(-1)$, und die zitierte Rekursionsformel, differentiiert, liefert sukzessive

die Werte von $Q'_n(0)$ für alle n. Die Werte von $Q_{n,\nu}(0)$ und $Q'_{n,\nu}(0)$ für $\nu > 0$ würden sich aus der die Funktionen $Q_{n,\nu}(x)$ definierenden Gleichung (6), S. 55 ergeben, wenn man darin für $Q_n(x)$ den Ausdruck (19a), S. 47 setzt. $Q_{n,\nu}(0)$ und $Q'_{n,\nu}(0)$ sind also weder $=0$, noch $=\infty$. — Ebenso erkennt man aus den erwähnten Formeln, daß $Q_{n,\nu}(i)$ nicht unendlich wird.

c) Die reziproke Entfernung zweier Punkte.

Die Entfernung ϱ der Punkte, deren elliptische Koordinaten r, ϑ, φ und $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$ sind, ist hier durch die Gleichung

$$(13)\quad \begin{aligned}\varrho^2 = r^2 + r_1^2 + e^2(\sin^2\vartheta + \sin^2\vartheta_1) - 2rr_1\cos\vartheta\cos\vartheta_1 \\ -2\sqrt{r^2+e^2}\sqrt{r_1^2+e^2}\sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1)\end{aligned}$$

bestimmt. Für ihren reziproken Wert ergibt sich, genau wie im vorhergehenden Kapitel, falls $r > r_1$ ist, ein Ausdruck der Form

$$(14)\quad \frac{1}{\varrho} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} H_{n\nu}\, Q_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right) P_{n,\nu}\left(\frac{ir_1}{e}\right) P_{n,\nu}(\cos\vartheta) P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1)\cos\nu(\varphi-\varphi_1).$$

Daraus folgt für den Grenzfall $e=0$

$$(14\text{a})\quad \lim_{e=0}\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\lim_{e=0}\left[H_{n\nu} Q_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right) P_{n,\nu}\left(\frac{ir_1}{e}\right)\right] P_{n,\nu}(\cos\vartheta) P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1)\cos\nu(\varphi-\varphi_1).$$

Andererseits gelten für $e=0$ auch hier die Gleichungen (20) und (20a), S. 170. Aus der Gleichheit der beiden Reihen für $\lim\limits_{e=0}\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ folgt

$$(15)\quad \lim_{e=0}\left[H_{n\nu} Q_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right) P_{n,\nu}\left(\frac{ir_1}{e}\right)\right] = \frac{r_1^n}{r^{n+1}} h_{n,\nu},$$

wo, wie früher, $h_{n,\nu}$ die in dem Additionstheorem der Kugelfunktionen auftretende Konstante bezeichnet. Schreibt man diese Gleichung

$$(15\text{a})\quad \lim_{e=0}\left[H_{n\nu}\frac{e}{i}\left(\frac{ir}{e}\right)^{n+1}Q_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right)\frac{P_{n,\nu}\left(\frac{ir_1}{e}\right)}{\left(\frac{ir_1}{e}\right)^n}\right]=h_{n,\nu}$$

und beachtet, daß nach den Gleichungen (8) und (9), S. 55, 56

$$\lim_{x=\infty}\left(x^{n+1}Q_{n,\nu}(x)\right)=1\,,\ \lim_{x=\infty}\left(\frac{P_{n,\nu}(x)}{x^n}\right)=1$$

ist, so folgt

$$(16)\qquad \lim_{e=0}\left(H_{n\nu}\,e\right)=i\,h_{n,\nu}\,,$$

oder

$$(16\text{a})\qquad H_{n\nu}=\frac{i\,h_{n,\nu}}{e}\,f_{n\nu}(e)\,,$$

wo $f_{n\nu}(e)$ eine Funktion von e bezeichnet, die für $e=0$ den Wert 1 annimmt. Da ferner auch hier $\frac{e}{\varrho}$ die Größe e nur in den Verbindungen $\frac{r}{e}, \frac{r_1}{e}$ enthält, so ist $f_{n\nu}(e)$ von e unabhängig, hat also für beliebige e denselben Wert wie für $e=0$, also den Wert 1, d. h. es wird

$$(16\text{b})\qquad H_{n\nu}=\frac{i\,h_{n,\nu}}{e}$$

und somit

$$(17)\ \frac{1}{\varrho}=\frac{i}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}h_{n,\nu}Q_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right)P_{n,\nu}\left(\frac{ir_1}{e}\right)P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\,P_{n,\nu}(\cos\vartheta_1)\cos\nu(\varphi-\varphi_1)$$
$$(r>r_1)\,,$$

während für $r<r_1$ in (17) r und r_1 zu vertauschen sind.

Hiermit sind für das abgeplattete Rotationsellipsoid alle Grundformeln aufgestellt. Benutzt man diese, so kann man alle das abgeplattete Rotationsellipsoid betreffenden Potentialaufgaben genau ebenso behandeln, wie es für die analogen Aufgaben des verlängerten Rotationsellipsoids in Kapitel 1 gezeigt ist.

Zusatz. Die Lösung der Potentialaufgaben für das dreiachsige Ellipsoid erfordert zunächst die Einführung eigentlicher elliptischer Koordinaten (die bisher benutzten sind Grenzfälle von diesen), d. h. es sind die rechtwink-

ligen Koordinaten eines Punktes auszudrücken durch die Achsen des Ellipsoids, des einschaligen und des zweischaligen Hyperboloids, die durch den betrachteten Punkt gehen und zu dem gegebenen Ellipsoid konfokal sind. Diese Flächen schneiden sich überall senkrecht. Die auf elliptische Koordinaten transformierte Gleichung $\Delta V = 0$ kann man in ähnlicher Weise lösen wie für die beiden Rotationsellipsoide, indem man zunächst ein partikuläres Integral sucht, das gleich dem Produkte dreier Funktionen ist, deren jede nur von einer der Veränderlichen abhängt. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen, auf die man dann für die einzelnen Faktoren gefuhrt wird, sind jedoch nicht mehr die Gleichungen der Kugelfunktionen, sondern komplizierter. Die dadurch definierten Funktionen bezeichnet man als Lamésche Funktionen.

Kapitel 3.

Exzentrische Kugeln.

a) Dipolare Koordinaten in der Ebene.

Der geometrische Ort der Punkte einer Ebene, die von zwei festen Punkten dieser Ebene konstantes Abstandsverhältnis haben, ist bekanntlich ein Kreis. Sind α und β die festen Punkte und legt man das Koordinatensystem so, daß sein Anfangspunkt O der Mittelpunkt der Strecke $\alpha\beta = 2c$ ist und die positive ξ-Achse in die Richtung $O\alpha$ fällt, so hat der Kreis, für dessen Punkte P

$$\frac{P\alpha}{P\beta} = m = e^{-t}$$

ist, die Gleichung

$$(1) \qquad \left(\xi - c\,\frac{1+m^2}{1-m^2}\right)^2 + \eta^2 = c^2 \cdot \frac{4m^2}{(1-m^2)^2}$$

oder

$$(1\text{a}) \qquad \xi^2 + \eta^2 + c^2 = 2c\xi\,\frac{1+m^2}{1-m^2} = 2c\xi\,\frac{\mathfrak{Ch}\,t}{\mathfrak{Sh}\,t},$$

wo

$$\mathfrak{Ch}\,t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \mathfrak{Sh}\,t = \frac{e^t - c^{-t}}{2}$$

den hyperbolischen Kosinus und Sinus bezeichnen. Für keinen Wert von m (oder t) schneidet der Kreis (1) die y-Achse. Für positive Werte von t, also für $m < 1$, liegt der Mittelpunkt M des Kreises und seine Schnittpunkte A_1, A_2 mit der ξ-Achse auf der positiven Seite dieser Achse, während für negative Werte von t, also für $m > 1$, M, A_1 und A_2 auf der negativen Seite dieser Achse liegen. Für $t = 0$, also $m = 1$, geht der Kreis in die η-Achse über, für $t = +\infty$, also $m = 0$ reduziert er sich auf den Punkt α,

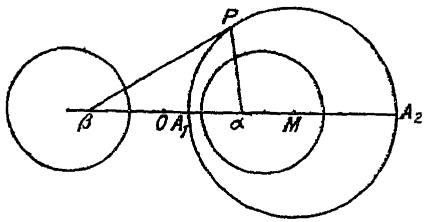

Fig 10

für $t = -\infty$, also $m = \infty$ auf den Punkt β. Für variable m oder t stellt (1) oder (1a) eine Schar von Kreisen dar. Von zwei Kreisen, die beide einen positiven Wert des Parameters t besitzen, liegt der Kreis mit dem größeren Parameter t ganz innerhalb des Kreises mit dem kleineren t; das Umgekehrte gilt für zwei Kreise mit negativen Werten des Parameters t, während von zwei Kreisen, für deren einen t positiv, für deren andern t negativ ist, der eine ganz außerhalb des andern liegt.

Ferner ergibt sich aus (1) für den Mittelpunkt M irgendeines der Kreise

$$\frac{M\alpha}{M\beta} = m^2 = e^{-2t}, \tag{1b}$$

der Mittelpunkt M eines Kreises t liegt daher auf demjenigen Kreise der obigen Schar, dessen Parameter t den doppelten Wert hat. Weiter ist

$$M\alpha \, . \, M\beta = c^2 \frac{4m^2}{(1-m^2)^2} = \frac{c^2}{\mathfrak{Sh}^2 t}. \tag{1c}$$

Die rechte Seite von (1c) ist das Quadrat des Kreisradius. Sind daher, wie oben, A_1, A_2 die Schnittpunkte des be-

trachteten Kreises mit der ξ-Achse, so kann (1c) auch so geschrieben werden:

(1d)
$$M\alpha . M\beta = \overline{MA_1}^2 = \overline{MA_2}^2,$$

d. h. die Punkte α, β, A_1, A_2 sind harmonische Punkte, und zwar α und β einander zugeordnet.

Irgendein Kreis, der durch α und β geht, dessen Mittelpunkt M' also auf der y-Achse liegt, schneidet alle Kreise der obigen Schar senkrecht. Denn ist S der Schnittpunkt eines der obigen Kreise mit dem Kreise, dessen Mittelpunkt M' ist, so ist $MS = MA_1$, daher nach (1d)

$$M\alpha . M\beta = \overline{MS}^2,$$

mithin ist MS · Tangente an den um M' beschriebenen Kreis; die in S an beide Kreise gezogenen Tangenten stehen also senkrecht aufeinander.

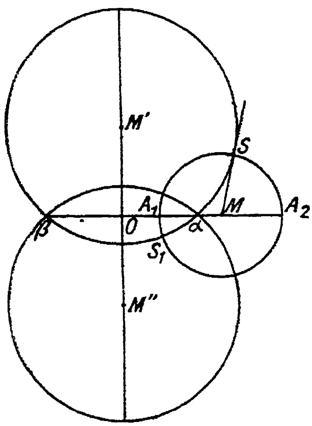

Fig. 11.

Die sämtlichen durch α und β gelegten Kreise bilden eine neue Schar, und jeder Kreis dieser Schar schneidet alle Kreise der ersten Schar senkrecht. Die Gleichung irgendeines Kreises der zweiten Schar ist, wenn M' sein Mittelpunkt und Winkel $\alpha M' \beta = 2u$ ist:

(2)
$$\xi^2 + (\eta - c . \operatorname{cotg} u)^2 = \frac{c^2}{\sin^2 u}$$

oder

(2a)
$$\xi^2 + \eta^2 - c^2 = 2c\eta \operatorname{cotg} u.$$

Mittels der Gleichungen (1a) und (2a) kann man die rechtwinkligen Koordinaten ξ, η irgendeines Punktes der Ebene durch die Parameter t, u derjenigen Kreise beider Scharen, die sich in ξ, η schneiden, ausdrücken. Bringt man in (1a) den Faktor $\mathfrak{Ch}\, t : \mathfrak{Sh}\, t$, in (2a) den Faktor

$\operatorname{cotg} u$ auf die andere Seite, quadriert und addiert dann beide Gleichungen, so folgt

$$(\xi^2+\eta^2)^2+c^4-2\,c^2(\xi^2+\eta^2)\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{h}^2\,t+\cos^2 u}{\mathfrak{C}\mathfrak{h}^2\,t-\cos^2 u}=0\,.$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$\text{(a)}\qquad \xi^2+\eta^2=c^2\frac{(\mathfrak{C}\mathfrak{h}\,t+\cos u)^2}{\mathfrak{C}\mathfrak{h}^2\,t-\cos^2 u}=c^2\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\,t+\cos u}{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\,t-\cos u},$$

$$\text{(b)}\qquad \xi^2+\eta^2=c^2\frac{(\mathfrak{C}\mathfrak{h}\,t-\cos u)^2}{\mathfrak{C}\mathfrak{h}^2\,t-\cos^2 u}=c^2\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\,t-\cos u}{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\,t+\cos u}.$$

Setzt man den Ausdruck (a) fur $\xi^2+\eta^2$ in (1a) und (2a) ein, so erhält man

$$\text{(3a)}\qquad \xi=c\frac{\mathfrak{S}\mathfrak{h}\,t}{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\,t-\cos u},\quad \eta=c\frac{\sin u}{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\,t-\cos u},$$

während der Ausdruck (b) für $\xi^2+\eta^2$

$$\text{(3b)}\qquad \xi=c\frac{\mathfrak{S}\mathfrak{h}\,t}{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\,t+\cos u},\quad \eta=-c\frac{\sin u}{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\,t+\cos u}$$

ergibt. Nun gehen die Ausdrücke (3b) aus (3a) hervor, wenn man in letzteren u durch $u+\pi$ ersetzt. Es genügt daher, die Formeln (3a) allein zu betrachten und darin u alle möglichen Werte zwischen 0 und 2π zu geben. Dann wird für $u<\pi$ η positiv, für $u>\pi$ η negativ. Geometrisch kommt das auf folgendes hinaus. Liegt der Mittelpunkt M' eines der Kreise (2) auf der positiven η-Achse, so war $\alpha M'\beta=2u<\pi$; mithin ist u der Peripheriewinkel über der Sehne $\alpha\beta$; und man muß für solche Punkte S, deren η-Koordinate positiv ist, den konkaven Winkel $\alpha S\beta=u$ $(<\frac{1}{2}\pi)$ setzen, dagegen ist für solche Punkte S_1, deren η-Koordinate negativ ist, u gleich dem konvexen Winkel $\alpha S_1\beta$, der zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$ liegt. Für Punkte der durch α und β gehenden Kreise, deren Mittelpunkt M'' auf der negativen η-Achse liegt, ist $\frac{\pi}{2}<u<\pi$, falls die η-Koordinate positiv, $\frac{3}{2}\pi<u<2\pi$, falls die η-Koordinate

negativ ist. Für Punkte der Linie $\alpha\beta$ selbst ist $u=\pi$; dagegen ist für Punkte der positiven ξ-Achse jenseits α, sowie für Punkte der negativen ξ-Achse jenseits β $u=0$. Für $t=0$ und $u=0$ wird $\xi^2+\eta^2$ unendlich groß. Je nach der Art, in der t und u sich gleichzeitig dem Werte 0 nähern, erhält man für $t=0, u=0$ die verschiedenen unendlich fernen Punkte. Denn für sehr kleine Werte von t und u ist

$$\frac{\eta}{\xi}=\frac{\sin u}{\mathfrak{Sh}\, t}=\frac{u}{t}.$$

Man nennt die Variabeln t, u **dipolare Koordinaten.**

Zusatz. Den durch die Gleichungen (3a) vermittelten Zusammenhang zwischen ξ, η einerseits, t, u andererseits kann man mit Benutzung komplexer Größen durch eine Gleichung darstellen. Ist, wie üblich, $\sqrt{-1}=i$, so folgt aus (3a)

$$\xi+i\eta=c\frac{\mathfrak{Sh}\, t+i\sin u}{\mathfrak{Ch}\, t-\cos u}=c\frac{e^t-e^{-t}+e^{iu}-e^{-iu}}{e^t+e^{-t}-e^{iu}-e^{-iu}}$$

$$=c\frac{e^{2t}-1+e^{t+iu}-e^{t-iu}}{e^{2t}+1-e^{t+iu}-e^{t-iu}}=c\frac{(e^{t+iu}-1)(e^{t-iu}+1)}{(e^{t+iu}-1)(e^{t-iu}-1)},$$

d. h.

$$(4)\qquad \xi+i\eta=c\frac{e^{t-iu}+1}{e^{t-iu}-1} \quad\text{und}\quad \xi-i\eta=c\frac{e^{t+iu}+1}{e^{t+iu}-1}.$$

b) Dipolare Koordinaten im Raum. Anwendung auf die reziproke Entfernung zweier Punkte.

Läßt man die Hälfte der von den obigen zwei Kreisscharen gebildeten Figur um die ξ-Achse rotieren, so gehen die Kreise der Schar t in exzentrische Kugeln über, die Kreise u in gewisse Flächen vierter Ordnung (Teile von Ringflächen). Beide Flächenscharen schneiden sich senkrecht, da die rotierenden Kreise diese Eigenschaft hatten. Nimmt man dazu die durch die Rotationsachse gelegten Ebenen, so hat man drei orthogonale Flächenscharen; d. h. setzt man

$$x=\xi,\ y=\eta\cos v,\ z=\eta\sin v \qquad (\eta\geqq 0).$$

oder

(5) $x = c\,\dfrac{\mathfrak{Sh}\,t}{\mathfrak{Ch}\,t - \cos u}, \quad y = c\,\dfrac{\sin u \cos v}{\mathfrak{Ch}\,t - \cos u}, \quad z = c\,\dfrac{\sin u \sin v}{\mathfrak{Ch}\,t - \cos u},$

so sind t, u, v die Parameter dreier orthogonaler Flächenscharen, und zwar sind die Flächen $t = \text{Const}$ exzentrische Kugeln. Um alle Punkte des Raumes zu erhalten, muß man t von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren lassen, u von 0 bis π, da ja η positiv ist, v von 0 bis 2π. Aus den Gleichungen (5) folgt noch [vgl. Gl. (a), S. 193]

(5a) $$x^2 + y^2 + z^2 = c^2\,\frac{\mathfrak{Ch}\,t + \cos u}{\mathfrak{Ch}\,t - \cos u}.$$

Für unsere Variabeln werden die S. 3 definierten Funktionen l, m, n, wenn man $t = \lambda$, $u = \mu$, $v = \nu$ setzt:

(6) $$l = m = \frac{c}{\mathfrak{Ch}\,t - \cos u}, \quad n = \frac{c \sin u}{\mathfrak{Ch}\,t - \cos u}.$$

Somit wird das Oberflächenelement einer Kugel $t = t_0$

(7) $$d o = m\,n\,du\,dv = \frac{c^2 \sin u\,du\,dv}{(\mathfrak{Ch}\,t_0 - \cos u)^2}.$$

Ferner ergibt sich aus (5) und (5a) für den Abstand ϱ zweier Punkte, deren rechtwinklige Koordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 sind, während denselben Punkten die Parameter t, u, v, resp. t_1, u_1, v_1 zugehören,

$$\begin{aligned}\varrho^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2(x x_1 + y y_1 + z z_1)\\ &= c^2\,\frac{\mathfrak{Ch}\,t + \cos u}{\mathfrak{Ch}\,t - \cos u} + c^2\,\frac{\mathfrak{Ch}\,t_1 + \cos u_1}{\mathfrak{Ch}\,t_1 - \cos u_1}\\ &\quad - 2c^2\,\frac{\mathfrak{Sh}\,t\,\mathfrak{Sh}\,t_1 + \sin u \sin u_1 \cos(v - v_1)}{(\mathfrak{Ch}\,t - \cos u)(\mathfrak{Ch}\,t_1 - \cos u_1)}\end{aligned}$$

oder

(8) $$\varrho^2 = 2c^2\,\frac{\mathfrak{Ch}\,t\,\mathfrak{Ch}\,t_1 - \mathfrak{Sh}\,t\,\mathfrak{Sh}\,t_1 - \cos\gamma}{(\mathfrak{Ch}\,t - \cos u)(\mathfrak{Ch}\,t_1 - \cos u_1)},$$

worin

(8a) $$\cos\gamma = \cos u \cos u_1 + \sin u \sin u_1 \cos(v - v_1)$$

ist.

Zur Entwicklung der reziproken Entfernung zweier Punkte ist zu beachten, daß

$$\mathfrak{Ch}\, t\, \mathfrak{Ch}\, t_1 - \mathfrak{Sh}\, t\, \mathfrak{Sh}\, t_1 = \mathfrak{Ch}\,(t-t_1) = \frac{e^{t-t_1} + e^{-(t-t_1)}}{2}$$

und daher

$$\mathfrak{Ch}\, t\, \mathfrak{Ch}\, t_1 - \mathfrak{Sh}\, t\, \mathfrak{Sh}\, t_1 - \cos\gamma$$
$$= \frac{e^{t-t_1}}{2}\left\{1 - 2e^{-(t-t_1)}\cos\gamma + e^{-2(t-t_1)}\right\}$$

oder auch

$$= \frac{e^{-(t-t_1)}}{2}\left\{1 - 2e^{t-t_1}\cos\gamma + e^{2(t-t_1)}\right\}$$

ist, so daß

$$(9)\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{c}\,\frac{\sqrt{\mathfrak{Ch}\, t - \cos u}\,\sqrt{\mathfrak{Ch}\, t_1 - \cos u_1}}{e^{\pm\frac{1}{2}(t-t_1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2e^{\mp(t-t_1)}\cos\gamma + e^{\mp 2(t-t_1)}}}$$

wird. Von den beiden Vorzeichen sollen überall die oberen genommen werden, wenn $t > t_1$, die unteren, wenn $t < t_1$ ist. Da im ersten Falle $e^{-(t-t_1)}$, im zweiten $e^{+(t-t_1)}$ kleiner als 1 ist, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2e^{\mp(t-t_1)}\cos\gamma + e^{\mp 2(t-t_1)}}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\mp n(t-t_1)} P_n(\cos\gamma)$$

und

$$(9\text{a})\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{c}\sqrt{\mathfrak{Ch}\, t - \cos u}\sqrt{\mathfrak{Ch}\, t_1 - \cos u_1}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})|t-t_1|} P_n(\cos\gamma),$$

wo $|t-t_1|$ den absoluten Wert von $t - t_1$ bezeichnet.

c) Das Problem der zwei Kugeln.

Auf Grundlage der vorstehenden Formeln kann man eine seit 100 Jahren viel behandelte Aufgabe erledigen, nämlich die der Elektrizitätsverteilung auf zwei isoliert aufgestellten leitenden Kugeln, denen freie Elektrizität mitgeteilt ist, ohne daß äußere Kräfte auf sie einwirken.

α) Vorbereitung. Es ist zunächst zu zeigen, daß man es durch passende Verfügung über c sowie über die

Lage von O stets erreichen kann, daß irgend zwei gegebene Kugeln, deren eine ganz außerhalb der anderen liegt, der vorher betrachteten Schar exzentrischer Kugeln angehören. Die Mittelpunkte beider Kugeln seien A und B, ihre Radien a und b, ihre Zentrale d. Da nach (1c), S. 191 α und β in bezug auf beide Kugeln konjugiert sind, so muß notwendig der eine der Punkte α, β innerhalb der Kugel A liegen, der andere innerhalb der Kugel B, und beide müssen zwischen A und B liegen. Wir nennen α den innerhalb der Kugel A, β den innerhalb B liegenden dieser Punkte. Dann ist nach (1c), S. 191

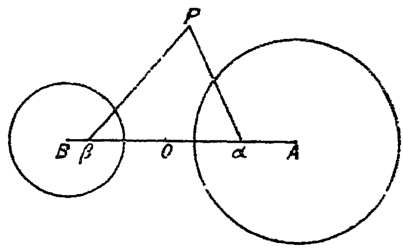

Fig. 12

(10) $$A\alpha(A\alpha+\alpha\beta)=a^2,\quad B\beta(B\beta+\alpha\beta)=b^2$$
und
(10a) $$A\alpha+B\beta+\alpha\beta=d,$$

und zwar bezeichnen die in diesen Gleichungen auftretenden Größen $A\alpha, B\beta, \alpha\beta$ die absoluten Werte dieser Strecken. Der Gleichung (10a) genügt man durch den Ansatz

(11) $$A\alpha=\frac{d-\alpha\beta}{2}+\lambda,\quad B\beta=\frac{d-\alpha\beta}{2}-\lambda,$$

und die Gleichungen (10) ergeben dann

(12) $$\left(\frac{d}{2}+\lambda\right)^2=a^2+\frac{\overline{\alpha\beta}^2}{4},\quad \left(\frac{d}{2}-\lambda\right)^2=b^2+\frac{\overline{\alpha\beta}^2}{4},$$

aus denen

(12a) $$\begin{cases} \lambda=\dfrac{a^2-b^2}{2d}, \\ \alpha\beta=\dfrac{\sqrt{(d^2+a^2-b^2)^2-4a^2d^2}}{d}=\dfrac{\sqrt{(d^2-a^2+b^2)^2-4b^2d^2}}{d} \end{cases}$$

folgt, so daß

$$(12\mathrm{b})\quad \begin{cases} A\alpha = \dfrac{d^2+a^2-b^2-\sqrt{(d^2+a^2-b^2)^2-4a^2d^2}}{2d}, \\ B\beta = \dfrac{d^2-a^2+b^2-\sqrt{(d^2-a^2+b^2)^2-4b^2d^2}}{2d} \end{cases}$$

wird. Die Gleichungen (12b) bestimmen, da A, B gegebene Punkte sind und α, β zwischen A und B liegen, die Lage der Punkte α, β und damit auch die ihres Mittelpunktes O; ferner ist $c = \frac{1}{2}\alpha\beta$. Man kann somit durch zweckmäßige Wahl der Größe c sowie der Lage von O stets erreichen, daß die beiden gegebenen Kugeln unserer Schar exzentrischer Kugeln angehören. Ferner sei die Richtung der positiven x-Achse so gewählt, daß die x-Koordinate von A positiv, die von B negativ ist. Der dem Kreise A zugehörige Parameterwert $+t_1$ sowie der dem Kreise B zugehörige $-t_2$ bestimmen sich aus der Gleichung (1b), S. 191

$$e^{-2t_1} = \frac{A\alpha}{A\beta}, \quad e^{+2t_2} = \frac{B\alpha}{B\beta},$$

d. h.

$$e^{-2t_1} = \frac{d^2+a^2-b^2-\sqrt{(d^2+a^2-b^2)^2-4a^2d^2}}{d^2+a^2-b^2+\sqrt{(d^2+a^2-b^2)^2-4a^2d^2}},$$

$$e^{2t_2} = \frac{d^2-a^2+b^2+\sqrt{(d^2-a^2+b^2)^2-4b^2d^2}}{d^2-a^2+b^2-\sqrt{(d^2-a^2+b^2)^2-4b^2d^2}},$$

oder

$$(13)\quad \begin{cases} e^{-t_1} = \dfrac{d^2+a^2-b^2-\sqrt{(d^2+a^2-b^2)^2-4a^2d^2}}{2ad}, \\ e^{t_2} = \dfrac{d^2-a^2+b^2+\sqrt{(d^2-a^2+b^2)^2-4b^2d^2}}{2bd}. \end{cases}$$

Zusatz 1. In ganz analoger Weise kann man auch c sowie die Lage der Punkte α, β, O so bestimmen, daß zwei gegebene exzentrische Kugeln, deren eine ganz innerhalb der andern liegt, unserer Schar angehören.

Zusatz 2. Transformiert man die gegebenen, um A und B beschriebenen Kugeln durch reziproke Radien von

einem der Punkte α oder β als Transformationszentrum, so sind die reziproken Kugeln konzentrisch.

β) Lösung der Aufgabe. Die Kugel $t = +t_1$ sei mit elektrischer Masse von der Dichtigkeit $\varkappa_1(u_1, v_1)$ belegt, die Kugel $t = -t_2$ mit Masse von der Dichtigkeit $\varkappa_2(u_2, v_2)$, wo u_1, v_1 die variabeln Parameter der Punkte der einen, u_2, v_2 die der andern Kugel bezeichnen. Das Potential der ersteren Kugel werde mit V, das der zweiten mit W bezeichnet, und die angehängten Indizes i, a sollen ausdrücken, daß es sich um einen inneren oder äußeren Punkt der betreffenden Kugel handelt. Die Oberflächenelemente der Kugeln sind durch Gleichung (7), S. 195 gegeben; somit wird

$$(14)\qquad V = c^2 \int\int \frac{\varkappa_1(u_1, v_1)\sin u_1\, d u_1\, d v_1}{(\mathfrak{Cof}\, t_1 - \cos u_1)^2}\,\frac{1}{\varrho},$$

wo ϱ den Abstand des Punktes t_1, u_1, v_1 der Kugelfläche A von dem Aufpunkte t, u, v bezeichnet. Die Integration ist nach u_1 von 0 bis π, nach v_1 von 0 bis 2π zu erstrecken.

Man denke nun die Funktion $\varkappa_1(u_1, v_1) : (\mathfrak{Cof}\, t_1 - \cos u_1)^{\frac{3}{2}}$ nach Kugelfunktionen entwickelt:

$$(15)\qquad \frac{\varkappa_1(u_1, v_1)}{(\mathfrak{Cof}\, t_1 - \cos u_1)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{m=0}^{\infty} X_m(u_1, v_1),$$

wende ferner für $\frac{1}{\varrho}$ die Formel (9a), S. 196 an, wobei zu beachten ist, daß für Punkte innerhalb der Kugel $t > t_1$, für äußere Punkte $t < t_1$ ist. Dann wird

$$V_i = c\sqrt{\mathfrak{Cof}\, t - \cos u}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin u_1\, d u_1\, d v_1 \left\{\sum_{m=0}^{\infty} X_m(u_1, v_1)\right\} \cdot \left\{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})(t-t_1)} P_n(\cos\gamma)\right\}.$$

Multipliziert man die Reihen gliedweise und wendet die Integralsätze der Kugelfunktionen an, so ergibt sich

$$(16)\quad V_i = 4\pi c\sqrt{\mathfrak{Cof}\, t - \cos u}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-(n+\frac{1}{2})(t-t_1)} X_n(u, v);$$

und den Wert von V_a erhält man aus (16), wenn man in dem Exponenten von e an Stelle von $t-t_1$ setzt t_1-t.

Um die Werte von W_i und W_a zu erhalten, entwickle man analog (15)

$$\frac{\varkappa_2(u_2, v_2)}{(\mathfrak{Cof}\, t_2-\cos u_2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{m=0}^{\infty} Y_m(u_2, v_2), \tag{15a}$$

und beachte bei der Entwicklung von $\frac{1}{\varrho}$, daß an der Kugel B t den Wert $-t_2$ hat, daß innerhalb der Kugel $t<-t_2$, außerhalb $t>-t_2$ ist, so wird

$$W_i=4\pi c\sqrt{\mathfrak{Cof}\, t-\cos u}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}e^{(n+\frac{1}{2})(t+t_2)}Y_n(u,v), \tag{16a}$$

während bei W_a im Exponenten von e $-(t+t_2)$ an Stelle von $(t+t_2)$ steht.

Die Bedingung des elektrischen Gleichgewichts der isoliert aufgestellten Kugeln erfordert, daß die Summe der Potentiale im Innern jeder der beiden Kugeln einen konstanten Wert hat. Bezeichnet man diese konstanten Werte mit h und k, so muß also

1) für $t>t_1$ $\quad V_i+W_a=h$,

2) für $t<-t_2$ $\quad V_a+W_i=k$

sein, d. h., wenn der Kürze halber die Argumente u, v der Kugelfunktionen fortgelassen werden,

$$(17)\begin{cases} 4\pi c\sqrt{\mathfrak{Cof}\, t-\cos u}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1} \\ \qquad\cdot\left\{e^{-(n+\frac{1}{2})(t-t_1)}X_n+e^{-(n+\frac{1}{2})(t+t_2)}Y_n\right\}=h, \quad (t>t_1), \\ 4\pi c\sqrt{\mathfrak{Cof}\, t-\cos u}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1} \\ \qquad\cdot\left\{e^{(n+\frac{1}{2})(t-t_1)}X_n+e^{(n+\frac{1}{2})(t+t_2)}Y_n\right\}=k, \quad (t<-t_2). \end{cases}$$

Um aus diesen Gleichungen die Kugelfunktionen X_n, Y_n zu bestimmen, muß man sie durch $\sqrt{\mathfrak{Cof}\, t-\cos u}$ dividieren

und den reziproken Wert dieser Wurzel ebenfalls nach Kugelfunktionen entwickeln. Nun ist

$$\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{Ch}\, t - \cos u}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^t + e^{-t} - 2\cos u}} = \frac{\sqrt{2}\, e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{1 + e^{-2t} - 2e^{-t}\cos u}}$$

$$\text{oder } = \frac{\sqrt{2}\, e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{1 + e^{2t} - 2e^{t}\cos u}}.$$

Von diesen beiden Darstellungen ist im Innern der Kugel A die erste zu nehmen, da dort t positiv ist, dagegen im Innern der Kugel B, wo t negativ ist, die zweite. Im Innern der Kugel A wird demnach

$$(18) \qquad \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{Ch}\, t - \cos u}} = \sqrt{2}\, e^{-\frac{t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-t})^n P_n(\cos u)$$
$$= \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})t}\, P_n(\cos u),$$

während für $t < -t_2$ in (18) nur $+t$ an Stelle von $-t$ tritt. Somit geht die erste der Gleichungen (17) in folgende über:

$$(19) \qquad 4\pi c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})t}}{2n+1} \left\{ e^{(n+\frac{1}{2})t_1} X_n + e^{-(n+\frac{1}{2})t_2} Y_n \right\}$$
$$= h\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})t}\, P_n(\cos u),$$

und da diese Gleichung für beliebige $t > t_1$ erfüllt werden soll, müssen die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von e^{-t} beiderseits gleich sein, d. h. für jeden Wert von n muß

$$(20) \qquad \frac{4\pi c}{2n+1} \left\{ e^{(n+\frac{1}{2})t_1} X_n + e^{-(n+\frac{1}{2})t_2} Y_n \right\} = h\sqrt{2}\, P_n(\cos u)$$

sein. Ebenso ergibt die zweite Gleichung (17)

$$(20\text{a}) \qquad \frac{4\pi c}{2n+1} \left\{ e^{-(n+\frac{1}{2})t_1} X_n + e^{(n+\frac{1}{2})t_2} Y_n \right\} = k\sqrt{2}\, P_n(\cos u).$$

Daraus folgt

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{4\pi c}{2n+1} X_n = \sqrt{2}\, P_n(\cos u)\, e^{-(n+\frac{1}{2})t_1} \dfrac{h - k e^{-(2n+1)t_2}}{1 - e^{-(2n+1)(t_1+t_2)}}, \\[2ex] \dfrac{4\pi c}{2n+1} Y_n = \sqrt{2}\, P_n(\cos u)\, e^{-(n+\frac{1}{2})t_2} \dfrac{k - h e^{-(2n+1)t_1}}{1 - e^{-(2n+1)(t_1+t_2)}}. \end{cases}$$

Mit X_n und Y_n hat man unmittelbar durch Anwendung von (15) und (15a) Reihen für die Dichtigkeit $\varkappa_1$, resp. $\varkappa_2$ der elektrischen Verteilung auf beiden Kugeln. Um die in (21) noch enthaltenen Konstanten h und k zu bestimmen, müssen die Massen der den beiden Kugelflächen mitgeteilten freien Elektrizität gegeben sein.

Das Potential V_a der Kugel A hat für Punkte außerhalb dieser Kugel den Wert

$$(22)\; V_a = \sqrt{\mathfrak{Cof}\, t - \cos u}\, \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{(n+\frac{1}{2})t} e^{-(2n+1)t_1} \frac{h - k e^{-(2n+1)t_2}}{1 - e^{-(2n+1)(t_1+t_2)}} P_n(\cos u).$$

Daraus erhält man den Wert von W_a, indem man t_1 mit t_2, h mit k und zugleich t mit $-t$ vertauscht.

Die einzelnen in V_a auftretenden Größen haben eine einfache Bedeutung. Ist P der Aufpunkt, so ist

$$e^{-t} = \frac{P\alpha}{P\beta}, \quad e^{-t_1} = \sqrt{\frac{A\alpha}{A\beta}}, \quad e^{-t_2} = \sqrt{\frac{B\beta}{B\alpha}},$$

also

$$e^{-(t_1+t_2)} = \sqrt{\frac{A\alpha}{A\beta} \cdot \frac{B\beta}{B\alpha}}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} P\alpha \cdot P\beta &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2 + z^2}\, \sqrt{(x+c)^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} \\ &= \frac{2c^2}{\mathfrak{Cof}\, t - \cos u}, \end{aligned}$$

wie aus den Gleichungen (5) und (5a), S. 195 folgt,

mithin
$$\sqrt{\mathfrak{Cof}\, t - \cos u}\, \sqrt{2} = \frac{2c}{\sqrt{P\alpha \cdot P\beta}}.$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$(23) \qquad \frac{A\alpha}{A\beta} = s^2, \quad \frac{A\alpha \cdot B\beta}{A\beta \cdot B\alpha} = q^2,$$

so nimmt V_a die Form an:

$$(24) \quad V_a = \frac{\overline{\alpha\beta}}{\overline{P\alpha}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\overline{P\beta}}{\overline{P\alpha}}\right)^n \frac{h\, s^{2n+1} - k\, q^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}} P_n(\cos u),$$

und Winkel u ist $= \alpha P \beta$.

Diese einfache Form des Resultates rührt von Darboux*) her.

Zusatz 1. Ist die eine der beiden Kugeln, z. B. die Kugel B, nicht isoliert aufgestellt, sondern zur Erde abgeleitet, so ist in den vorstehenden Formeln nur $k = 0$ zu setzen.

Zusatz 2. Das Resultat läßt sich auch auf den Fall anwenden, daß eine der beiden Kugeln eine Ebene ist. Denn für $t_2 = 0$ geht die Kugel B in die yz-Ebene über. — Ist umgekehrt die Ebene ε und die Kugel um A mit dem Radius a gegeben, so fälle man von A auf ε das Lot $A\,O$, so hat man den Punkt O. Ferner ist

$$O\,A = c\,\frac{\mathfrak{Ch}\, t_1}{\mathfrak{Sh}\, t_1}, \quad a = \frac{c}{\mathfrak{Sh}\, t_1},$$

womit t_1 und c bestimmt sind und mit c auch die Punkte α und β.

---

*) Bulletin des sciences mathématiques (2), **31**, 17—28, 1907. Darboux benutzt zur Ableitung der Formel (24) eine ganz andere Methode; auch stellt er nicht direkt die obige Reihe auf, sondern die fur

$$V_a - \frac{h \cdot a}{\overline{PA}}.$$

Die obigen Formeln (22) oder (24) haben den Vorzug, daß sie sich ohne weiteres auf den Fall anwenden lassen, daß eine der Kugeln in eine Ebene ubergeht.

d) Die allgemeine Randwertaufgabe für zwei exzentrische Kugeln. — Elektrizitätsverteilung auf zwei Kugeln bei Einwirkung äußerer Kräfte.

Da die hier betrachteten Flächenscharen t, u, v orthogonal sind, kann der Ausdruck ΔV mittels der Formel (9), S. 6 auf die Variabeln t, u, v transformiert werden. Die Werte von l, m, n für diese Variabeln sind in (6), S. 195 angegeben. Es wird somit

$$(25)\quad \Delta V = \frac{(\mathfrak{C}\mathfrak{h}\, t - \cos u)^3}{c^3 \sin u} \left\{ \frac{\partial \left(\frac{c \sin u}{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\, t - \cos u} \frac{\partial V}{\partial t} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{c \sin u}{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\, t - \cos u} \frac{\partial V}{\partial u} \right)}{\partial u} + \frac{c}{\sin u (\mathfrak{C}\mathfrak{h}\, t - \cos u)} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right\}.$$

Führt man hierin an Stelle von V die neue Variable V_1 durch die Gleichung

$$(26)\qquad V = V_1 \sqrt{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\, t - \cos u}$$

ein, so wird

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \left(\frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\, t - \cos u} \frac{\partial V}{\partial t} \right)}{\partial t} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\, t - \cos u}} \\ \qquad \cdot \left\{ \dfrac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} + V_1 \left[\dfrac{1}{2} \dfrac{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\, t}{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\, t - \cos u} - \dfrac{3}{4} \dfrac{\mathfrak{S}\mathfrak{h}^2 t}{(\mathfrak{C}\mathfrak{h}\, t - \cos u)^2} \right] \right\}, \\ \dfrac{1}{\sin u} \dfrac{\partial \left(\frac{\sin u}{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\, t - \cos u} \frac{\partial V}{\partial u} \right)}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\, t - \cos u}} \\ \cdot \left\{ \dfrac{1}{\sin u} \dfrac{\partial \sin u \frac{\partial V_1}{\partial u}}{\partial u} + V_1 \left[\dfrac{\cos u}{\mathfrak{C}\mathfrak{h}\, t - \cos u} - \dfrac{3}{4} \dfrac{\sin^2 u}{(\mathfrak{C}\mathfrak{h}\, t - \cos u)^2} \right] \right\}. \end{cases}$$

Nun ist

$$\mathfrak{S}\mathfrak{h}^2\, t + \sin^2 u = \mathfrak{C}\mathfrak{h}^2\, t - \cos^2 u.$$

Addiert man die Gleichungen (27), so wird der Faktor von V_1 auf der rechten Seite

$$\frac{\frac{1}{2}\,\mathfrak{Ch}\,t+\cos u-\frac{3}{4}(\mathfrak{Ch}\,t+\cos u)}{\mathfrak{Ch}\,t-\cos u}=-\frac{1}{4},$$

daher geht durch die Substitution (26) Gleichung (25) in folgende über:

$$(25\text{a})\quad \varDelta V=\frac{(\mathfrak{Ch}\,t-\cos u)^{\frac{5}{2}}}{c^2}\cdot\left\{\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}+\frac{1}{\sin u}\,\frac{\partial \sin u\frac{\partial V_1}{\partial u}}{\partial u}+\frac{1}{\sin^2 u}\,\frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}-\frac{1}{4}\,V_1\right\},$$

und die Laplacesche Gleichung $\varDelta V=0$ wird

$$(28)\quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}+\frac{1}{\sin u}\,\frac{\partial \sin u\frac{\partial V_1}{\partial u}}{\partial u}+\frac{1}{\sin^2 u}\,\frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}-\frac{1}{4}\,V_1=0\,.$$

Sucht man, analog wie S. 113, eine Lösung dieser Gleichung von der Form

$$(29)\qquad V_1=W_1\,W_2\,W_3\,,$$

wo W_1 nur von t, W_2 nur von u, W_3 nur von v abhängt, und verlangt dazu, daß die Lösung für alle Punkte des gerade betrachteten Gebiets, also auch für $u=0$ und $u=\pi$ endlich, und daß sie außerdem eindeutig, daher in bezug auf v um 2π periodisch ist, so ergibt sich, genau wie an der angegebenen Stelle, daß $W_2\,W_3$ die Form haben muß:

$$(29\text{a})\quad W_2\,W_3=P_{n,\nu}(\cos u)\,\{C\cos(\nu v)+C'\sin(\nu v)\},$$

wo n und ν ganze Zahlen sind und $n\geqq\nu$ ist. Für W_1 ergibt sich ferner die Gleichung

$$\frac{d^2 W_1}{d t^2}-\left[n(n+1)+\frac{1}{4}\right]W_1=0,$$

deren allgemeines Integral

$$(29\text{b})\qquad W_1=A\,e^{(n+\frac{1}{2})t}+A'\,e^{-(n+\frac{1}{2})t}$$

ist. Aus dem partikulären Integral, das durch Einsetzen von (29a) und (29b) in (29) entsteht, erhält man die allgemeine Lösung, die den geforderten Nebenbedingungen genügt, indem man über alle ganzen Zahlen ν von $\nu=0$ bis $\nu=n$, dann über alle ganzen Zahlen n summiert und dabei den willkürlichen Konstanten von Glied zu Glied andere Werte beilegt. Nun ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} P_{n,\nu}(\cos u)\{C_{n\nu}\cos(\nu v)+C'_{n\nu}\sin(\nu v)\}=X_n(u,v)$$

die allgemeine Kugelfunktion mit zwei Variabeln. Somit wird die allgemeine Lösung von (28), die alle charakteristischen Eigenschaften des Potentials besitzt,

$$(30)\qquad V_1=\sum_{n=0}^{\infty}\{e^{(n+\frac{1}{2})t}X_n(u,v)+e^{-(n+\frac{1}{2})t}X'_n(u,v)\},$$

und V ergibt sich aus (26). X'_n bezeichnet dabei eine Funktion ganz derselben Art wie X_n, nur mit anderen Konstanten.

Handelt es sich um einen Raum, in dem $t=\infty$ werden kann, d. h. um einen Raum, der den Punkt α enthält, so sind sämtliche $X_n=0$ zu setzen, damit V_1 endlich bleibt, während in einem Raume, der den Punkt β enthält, alle X'_n verschwinden müssen.

Die erste Randwertaufgabe ist nun eine doppelte:

1. Es soll für den von zwei exzentrischen Kugeln, deren eine innerhalb der anderen liegt, begrenzten Raum die Lösung der Laplaceschen Gleichung $\Delta V=0$ gefunden werden, die nebst ihren Ableitungen innerhalb jenes Gebiets eindeutig, endlich und kontinuierlich ist, und die an den Kugelflächen gegebene Werte annimmt.

Für die den Raum begrenzenden Kugelflächen sei $t=t_1$, resp. $t=t_2$, wo t_1 und t_2 beide positiv sind, und die gegebenen Randwerte seien $F_1(u,v)$ für $t=t_1$, $F_2(u,v)$ für $t=t_2$. Die Lösung hat die Form (30), und für $t=t_1$ muß die rechte Seite von (30) $=F_1(u,v):\sqrt{\mathfrak{Cos}\,t_1-\cos u}$, für $t=t_2$ dagegen $=F_2(u,v):\sqrt{\mathfrak{Cos}\,t_2-\cos u}$ sein. Entwickelt man $F_1(u,v):\sqrt{\mathfrak{Cos}\,t_1-\cos u}$ und $F_2(u,v):\sqrt{\mathfrak{Cos}\,t_2-\cos u}$ nach Kugelfunktionen und beachtet, daß, wenn zwei Entwicklungen nach Kugelfunktionen gleich sein sollen, die

einzelnen Kugelfunktionen beiderseits übereinstimmen müssen, so sind dadurch alle X_n und X'_n bestimmt.

2. Es soll für den Raum außerhalb zweier Kugeln, deren eine ganz außerhalb der anderen liegt, dieselbe Aufgabe gelöst werden.

Der Unterschied gegen die vorhergehende Aufgabe besteht nur darin, daß die konstanten Werte von t an den beiden Kugeln entgegengesetzte Vorzeichen haben, also t_1 positiv, t_2 negativ ist. Die Bedingung, daß V verschwinden muß, wenn der Aufpunkt ins Unendliche rückt, wird von selbst erfüllt, da dann nach S. 194 $t=0$ und $u=0$, also $\sqrt{\mathfrak{Ch}\, t - \cos u} = 0$ wird.

3. Ist dieselbe Aufgabe für den Innenraum einer Kugel zu lösen, z. B. für den Innenraum von $t = t_1$, wo t_1 positiv ist, so sind alle $X_n = 0$ zu setzen.

4. Analog wird auch die zweite Randwertaufgabe gelöst. Hier ist die Randbedingung nur die, daß für $t = t_1$ und $t = \pm t_2$

$$\frac{\partial V}{\partial N} = \frac{1}{l}\,\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\mathfrak{Ch}\, t - \cos u}{c}\,\frac{\partial V}{\partial t}.$$

gegebene Werte hat.

Auch die allgemeine Aufgabe der Elektrizitätsverteilung auf zwei leitenden Kugeln, deren eine außerhalb der anderen liegt, unter Einwirkung beliebig gegebener elektrischer Kräfte läßt sich nunmehr lösen.

Wird für die Dichtigkeiten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ der auf den Kugeln $t = t_1$ und $t = -t_2$ ausgebreiteten elektrischen Massen derselbe Ansatz gemacht, wie S. 199, 200, so ergeben sich für die Potentiale beider Kugeln V, W dieselben Ausdrücke wie an der angeführten Stelle. Ferner sei das Potential der gegebenen elektrischen Kräfte, die außerhalb beider Kugeln ihren Sitz haben mögen, U. Innerhalb beider Kugeln genügt dann U der Laplaceschen Gleichung und besitzt die sonstigen charakteristischen Eigenschaften des Potentials. Für das Innere der Kugel $t = +t_1$ läßt sich daher U so darstellen:

$$(U)_{t > t_1} = U_1 = \sqrt{\mathfrak{Ch}\, t - \cos u}\sum_0^\infty e^{-(n+\frac{1}{2})t} Z_n(u, v),$$

und für das Innere der Kugel $t = -t_2$

$$(U)_{t<-t_2} = U_2 = \sqrt{\mathfrak{Ch}\, t - \cos u}\sum_0^\infty e^{(n+\frac{1}{2})t} Z'_n(u,v),$$

wo Z_n, Z'_n gegebene Kugelfunktionen sind. Das elektrische Gleichgewicht erfordert dann, daß

$$\begin{aligned} &1)\ \text{für } t > t_1 \quad U_1 + V_i + W_a = h,\\ &2)\ \text{für } t < -t_2 \quad U_2 + V_a + W_i = k \end{aligned}$$

ist. Die Bestimmung der Dichtigkeiten $\varkappa_1, \varkappa_2$ aus diesen Gleichungen gestaltet sich ganz analog wie in dem einfacheren, in Abschnitt c) behandelten Problem, in dem nur U_1 und $U_2 = 0$ waren.

Es mögen z. B. die beiden leitenden, mit Elektrizität geladenen Kugeln unter Einwirkung eines induzierenden elektrischen Punktes stehen. Seine Masse sei μ, seine Koordinaten t_0, u_0, v_0, wobei $t_1 > t_0 > -t_2$ ist; ferner sei ϱ_0 der Abstand des Punktes μ von dem Aufpunkt t, u, v. Dann ist

$$U = \frac{\mu}{\varrho_0},$$

und $\frac{1}{\varrho_0}$ kann man nach Gleichung (9a), S. 196 nach Kugelfunktionen entwickeln.

In derselben Weise läßt sich die elektrische Verteilung auf einem Leiter bestimmen, der von zwei exzentrischen Kugeln begrenzt wird, deren eine ganz innerhalb der anderen liegt. Ist $t = +t_1$ die äußere, $t = +t_2$ die innere Kugel ($t_2 > t_1$), so tritt nur $+t_2$ an Stelle von $-t_2$. Haben die induzierenden elektrischen Kräfte ihren Sitz außerhalb der Kugel t_1, so ergibt sich, wie bei konzentrischen Kugeln, das Resultat, daß auf der inneren Kugelfläche keine freie Elektrizität ausgebreitet ist.

e) Hinweis auf weitere Probleme.

α) Ringfläche. Kehren wir zu den in Abschnitt a) betrachteten Kreisscharen der Ebene $\xi\eta$ zurück und lassen nunmehr diejenige Hälfte der von diesen Kreisscharen gebildeten Figur, für die ξ positive Werte hat, um die

η-Achse rotieren, setzen also, indem wir die Rotationsachse als x-Achse nehmen,

$$x = \eta = c\frac{\sin u}{\mathfrak{Cof}\,t - \cos u},$$

$$y = \xi \cos v = c\frac{\mathfrak{Sin}\,t \sin v}{\mathfrak{Cof}\,t - \cos u}, \quad z = \xi \sin v = c\frac{\mathfrak{Sin}\,t \sin v}{\mathfrak{Cof}\,t - \cos u},$$

so gehen die Kreise $t = \text{Const}$ in Ringflächen über, die Kreise $u = \text{Const}$ in Kugeln, die sich sämtlich in demjenigen Kreise schneiden, der von dem Punkte a bei der Rotation beschrieben wird. Um alle Punkte des Raumes zu erhalten, aber derart, daß auch umgekehrt zu jedem Punkte nur ein Wertsystem von t, u, v gehört, muß hier t von 0 bis $+\infty$ variieren, u von 0 bis 2π, v ebenfalls von 0 bis 2π. Die Hilfsgrößen l, m haben hier dieselben Werte wie S. 195; dagegen wird

$$n = c\frac{\mathfrak{Sin}\,t}{\mathfrak{Cof}\,t - \cos u},$$

daher

$$\Delta V = \frac{(\mathfrak{Cof}\,t - \cos u)^3}{c^2\,\mathfrak{Sin}\,t} \cdot \left\{ \frac{\partial \dfrac{\mathfrak{Sin}\,t}{\mathfrak{Cof}\,t - \cos u}\dfrac{\partial V}{\partial t}}{\partial t} + \frac{\partial \dfrac{\mathfrak{Sin}\,t}{\mathfrak{Cof}\,t - \cos u}\dfrac{\partial V}{\partial u}}{\partial u} + \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,t(\mathfrak{Cof}\,t - \cos u)}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right\}.$$

Setzt man wieder

$$V = V_1 \sqrt{\mathfrak{Cof}\,t - \cos u},$$

so wird

$$\Delta V = \frac{(\mathfrak{Cof}\,t - \cos u)^{\frac{5}{2}}}{c^2} \cdot \left\{ \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,t}\frac{\partial\, \mathfrak{Sin}\,t \dfrac{\partial V_1}{\partial t}}{\partial t} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial u^2} + \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 t}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \frac{1}{4} V_1 \right\}.$$

Sucht man auch hier ein partikuläres Integral der Gleichung $\Delta V = 0$ von der Form

$$V_1 = W_1 W_2 W_3,$$

wo W_1 nur von t, W_2 nur von u, W_3 nur von v abhängt, so müssen W_2 und W_3 Gleichungen von der Form

$$\frac{d^2 W_2}{d u^2} = c_1 W_2, \quad \frac{d^2 W_3}{d v^2} = c_2 W_3$$

genügen. Da ferner die Parameterwerte $u=0$ und $u=2\pi$ denselben Punkt ergeben, ebenso $v=0$ und $v=2\pi$, so müssen W_2 und W_3 je um 2π periodisch sein, es müssen also c_1 und c_2 die mit -1 multiplizierten Quadrate zweier ganzen Zahlen sein, d. h., wenn n, ν ganze Zahlen bezeichnen,

$$W_2 = B\cos(n u) + B'\sin(n u), \quad W_3 = C\cos(\nu v) + C'\sin(\nu v).$$

Für W_1 ergibt sich infolgedessen aus $\Delta V = 0$ die Gleichung

$$\frac{1}{\mathfrak{Sh}\, t} \frac{d\, \mathfrak{Sh}\, t \dfrac{d W_1}{d t}}{d t} - \frac{\nu^2}{\mathfrak{Sh}^2 t} W_1 = \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) W_1,$$

oder wenn nach $\mathfrak{Ch}\, t = \lambda$ gesetzt wird,

$$\text{(G)} \qquad \frac{d (\lambda^2 - 1) \dfrac{d W_1}{d \lambda}}{d \lambda} - \frac{\nu^2}{\lambda^2 - 1} W_1 = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right) W_1.$$

Das ist eine Gleichung, die ganz analog ist der Differentialgleichung der zugeordneten Kugelfunktionen, nur steht in jener Differentialgleichung $n(n+1)$, hier dagegen $\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Durch die Gleichung (G) sind also Funktionen bestimmt, die aus den Kugelfunktionen dadurch hervorgehen, daß man statt des ganzzahligen Parameters n den Parameter $n - \frac{1}{2}$, d. h. die Hälfte einer ungeraden Zahl setzt. Auf die Eigenschaften dieser Funktionen, die man als Ringfunktionen bezeichnet, sowie auf die weitere Behandlung der Potentialaufgaben für den Ring soll hier nicht näher eingegangen werden.

Zusatz. Die Potentialaufgaben für den Rotationskegel führen auf Funktionen, die aus den Kugelfunktionen dadurch hervorgehen, daß man dem Parameter n der Kugelfunktion imaginäre Werte erteilt:

$$n = -\frac{1}{2} + i\mu$$

(μ beliebig). Man nennt diese Funktionen Kegelfunktionen.

β) Berührende Kugeln. Neben den in Abschnitt a) behandelten orthogonalen Kreisscharen existieren noch zwei andere derartige Scharen. Die Gleichung

$$\text{(I)} \qquad \xi^2 + \eta^2 = \frac{\xi}{t}$$

stellt, wenn der Parameter t variiert, eine Schar von Kreisen dar, die alle einander und die η-Achse im Anfangspunkte berühren. Nimmt man dazu die zweite Kreisschar

$$\text{(II)} \qquad \xi^2 + \eta^2 = \frac{\eta}{u},$$

so wird jeder Kreis der ersten Schar von allen Kreisen der zweiten Schar senkrecht geschnitten, und umgekehrt. Durch die Parameter t, u lassen sich ξ, η so ausdrücken:

$$\xi = \frac{t}{t^2+u^2}, \quad \eta = \frac{u}{t^2+u^2} \quad \text{oder} \quad \xi + i\eta = \frac{1}{t-iu}.$$

Läßt man diese Kreise um die Achse ξ rotieren, so geht die eine Kreisschar in eine Schar sich berührender Kugeln über, für die

$$x = \frac{t}{t^2+u^2}, \quad y = \frac{u \cos v}{t^2+u^2}, \quad z = \frac{u \sin v}{t^2+u^2}$$

ist. Auf die Variabeln t, u, v, die man als sympolare Koordinaten bezeichnet, transformiert, lautet die Gleichung $\Delta V = 0$:

$$\frac{\partial \frac{1}{t^2+u^2} \frac{\partial V}{\partial t}}{\partial t} + \frac{1}{u} \frac{\partial \frac{u}{t^2+u^2} \frac{\partial V}{\partial u}}{\partial u} + \frac{1}{u^2(t^2+u^2)} V = 0.$$

Setzt man

$$V = V_1 \sqrt{t^2 + u^2},$$

so wird

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial u \frac{\partial V_1}{\partial u}}{\partial u} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2} = 0 .$$

Ein partikuläres Integral dieser Gleichung ist

$$\text{(a)} \qquad V_1 = e^{pt} \left(C \cos(\nu v) + C' \sin(\nu v) \right) U,$$

wo p eine beliebige positive oder negative Zahl ist, ν eine ganze Zahl, während U der Gleichung

$$\text{(G}^{\text{I}}\text{)} \qquad \frac{d^2 U}{d u^2} + \frac{1}{u} \frac{d U}{d u} + \left(p^2 - \frac{\nu^2}{u^2} \right) U = 0$$

genügt. Die durch (G$^{\text{I}}$) bestimmten Funktionen sind die Zylinder- oder Besselschen Funktionen. Man erhält übrigens aus (a) die allgemeine Lösung der Gleichung $\Delta V = 0$, wenn man nach ν über alle ganzen Zahlen ν summiert, nach p aber integriert.

Auch hier begnügen wir uns mit diesem Ansatz des Problems, ohne dasselbe weiterzuführen.

IV. Abschnitt.

Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie für beliebige geschlossene Flächen.

Einleitung.

Eine Funktion, die in einem Raume T, der innerhalb einer geschlossenen Fläche F liegt oder sich außerhalb F ins Unendliche erstreckt, der Laplaceschen Gleichung $\Delta V = 0$ genügt, die ferner in T nebst allen ihren Ableitungen überall endlich, eindeutig und kontinuierlich ist und, falls sich T ins Unendliche erstreckt, dort verschwindet, wie $C|r$ für $r = \infty$, soll kurz eine Potentialfunktion des Raumes T genannt werden. In bezug auf solche Funktionen sind in Abschnitt II folgende Resultate abgeleitet: Eine Potentialfunktion ist für den Innenraum einer Kugel vollständig bestimmt, wenn ihre Werte an der Kugelfläche gegeben sind. Dasselbe gilt für den Außenraum einer gegebenen Kugel, sowie für den Raum zwischen zwei konzentrischen Kugeln, falls im letzteren Fall die Werte der Potentialfunktion an beiden Kugelflächen gegeben sind. Auch für den Innen- und Außenraum eines Rotationsellipsoids sowie den Raum zwischen zwei konfokalen Rotationsellipsoiden ist in Abschnitt III die Potentialfunktion aus ihren Randwerten bestimmt, ebenso für den von zwei exzentrischen Kugeln begrenzten Raum, mag die eine dieser Kugeln ganz außerhalb oder ganz innerhalb der anderen liegen. Außerdem ist gezeigt, daß für die eben genannten Räume an Stelle der Randwerte der Potentialfunktion selbst die Randwerte ihrer normalen Ableitung gegeben sein können (zweite Randwertaufgabe).

Diese Resultate lassen sich dahin erweitern, daß sie auch für Räume gelten, die von anderen als den genannten

Flächen begrenzt sind. Es sollen die wichtigsten Methoden, mittels deren man den Nachweis für die genannten Erweiterungen zu führen versucht hat, kurz dargelegt werden. Ehe wir aber auf die Randwertaufgaben selbst eingehen, sollen einige Sätze aufgestellt werden, deren wesentlichste zuerst von Gauß angegeben sind. Diese Sätze, die wichtige allgemeine Eigenschaften des Potentials betreffen, werden weiterhin angewandt werden.

Kapitel 1.

Einige allgemeine Sätze über das Potential von Massen.

Satz 1. Der Gaußsche Satz des arithmetischen Mittels.

Wir betrachten die Werte, die das Potential V_a von Massen außerhalb einer Kugel vom Radius R in Punkten der Kugelfläche hat. Bezeichnet ϱ' den Abstand eines Punktes P der Kugelfläche von einem der äußeren Massenpunkte Q', μ' die Masse in letzterem Punkte, so ist

$$V_a = \sum \frac{\mu'}{\varrho'}. \tag{1}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit dem Flächenelemente do der Kugel im Punkte P und integrieren über die Kugelfläche, so wird

$$\iint V_a\, do = \sum \mu' \iint \frac{do}{\varrho'}. \tag{2}$$

Das rechtsstehende Integral ist nach der ersten Formel (A) S. 99 $= 4\pi R^2 : r$, wo r den Abstand des Punktes Q' vom Kugelmittelpunkte bezeichnet. Somit wird

$$\iint V_a\, do = 4\pi R^2 \sum \frac{\mu'}{r} = 4\pi R^2 V_a^0, \tag{3}$$

wo V_a^0 den Wert bezeichnet, den das Potential der Massen μ' im Mittelpunkte der Kugel annimmt.

Die Ableitung gilt ohne weiteres, wenn an Stelle der bisher ins Auge gefaßten einzelnen Massenpunkte räum-

liche oder auf Flächen ausgebreitete Massen treten. Dann tritt an Stelle der Summation in (1) nur eine Integration. Bei der weiteren Integration über die Kugelfläche ist zu beachten, daß die Koordinaten der Punkte P der Kugelfläche nur in ϱ' auftreten, nicht in den Grenzen des über die Massen zu erstreckenden Integrals, noch in der Dichtigkeit. Statt jenes Integral ist daher nur der Faktor $1|\varrho'$ innerhalb des Integrals nach do zu integrieren.

Weiter mögen an Stelle der Massen μ' außerhalb der Kugel R andere Massen μ innerhalb R treten, und ϱ sei der Abstand eines Massenpunktes Q von einem Punkte P von R, so wird das Potential V_i dieser Massen

$$V_i = \sum \frac{\mu}{\varrho}, \tag{1a}$$

weiter

$$\iint V_i \, do = \sum \mu \iint \frac{do}{\varrho}, \tag{2a}$$

also nach der zweiten Gleichung (A), S. 99

$$\iint V_i \, do = 4\pi R \sum \mu = 4\pi R M_i, \tag{3a}$$

worin M_i die gesamte innerhalb der Kugel liegende wirkende Masse bezeichnet.

Ist drittens die Masse $\bar{\mu}$ auf der Kugelfläche R selbst ausgebreitet, so gilt sowohl die Formel (3), als (3a), da in diesem Falle das in (3) auftretende $r = R$ ist.

Handelt es sich endlich um Massen, die teils außerhalb, teils innerhalb der Kugel, teils auf derselben liegen, so teile man die gesamte Masse M in den außerhalb liegenden Teil M_a und den innerhalb liegenden Teil M_i, wobei die auf der Kugel selbst liegenden Massenteile beliebig zu M_a oder M_i gerechnet werden können. Das Potential von M_a sei V_a, das von M_i sei V_i, das Gesamtpotential sei V, so ist

$$\iint V \, do = \iint V_a \, do + \iint V_i \, do = 4\pi R^2 V_a^0 + 4\pi R M_i, \tag{4}$$

wo V_a^0 wieder den Wert von V_a im Kugelmittelpunkte bezeichnet. Der Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint V\,do = \frac{\iint V\,do}{\iint do}$$

stellt nun das arithmetische Mittel derjenigen Werte dar, die V auf der Kugelfläche R annimmt (über den Begriff des arithmetischen Mittels einer Funktion auf einem Kreise vgl. S. 91—92, und analog ist der Begriff für eine Kugel zu bilden). Man kann daher die Gleichung (4) so aussprechen:

Das arithmetische Mittel der Werte, welche das Potential beliebiger Massen auf einer Kugelfläche vom Radius R annimmt, ist gleich dem Wert, den das Potential der außerhalb der Kugel liegenden Teile der Massen im Kugelmittelpunkte hat, vermehrt um den Quotienten aus der Gesamtmasse der innerhalb der Kugel liegenden Massenteile und dem Kugelradius.

Satz 2. Wert des über eine beliebige geschlossene Fläche erstreckten Integrals $\iint \frac{\partial V}{\partial N} do$.

Es sei P ein Punkt der geschlossenen Fläche F, Q' ein Punkt des Außenraums, Q ein Punkt des Innenraums dieser Fläche, und es werde der Abstand PQ' mit ϱ', der Abstand PQ mit ϱ bezeichnet. Ferner seien in verschiedenen Punkten Q' wirksame Massen μ', ebenso in verschiedenen Punkten Q die Massen μ konzentriert. Die Werte, die die Potentiale dieser Massen in P haben, seien V_a, resp. V_i, so ist

$$V_a = \sum \frac{\mu'}{\varrho'}, \quad V_i = \sum \frac{\mu}{\varrho}.$$

Differentiiert man nach der äußeren Normale N von F in P, so wird

$$(5) \qquad \frac{\partial V_a}{\partial N} = \sum \mu' \frac{\partial \frac{1}{\varrho'}}{\partial N}, \quad \frac{\partial V_i}{\partial N} = \sum \mu \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N},$$

und durch Integration über F folgt

$$(6)\qquad \begin{cases} \displaystyle\iint \frac{\partial V_a}{\partial N}\,d o=\sum \mu' \iint \frac{\partial \frac{1}{\varrho'}}{\partial N}\,d o, \\ \displaystyle\iint \frac{\partial V_i}{\partial N}\,d o=\sum \mu \iint \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N}\,d o. \end{cases}$$

Nun ist [vgl. Teil I, S. 153—154]

$$\frac{\partial \frac{1}{\varrho'}}{\partial N}=-\frac{\cos(\varrho', N)}{\varrho'^2},\quad \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N}=-\frac{\cos(\varrho, N)}{\varrho^2},$$

falls als Richtung von ϱ' die Richtung von Q' nach P hin, als Richtung von ϱ die von Q nach P hin genommen wird, und nach einer Formel von Gauß, die in Teil I, S. 70 abgeleitet ist, ist

$$\iint \frac{d o \cos(\varrho', N)}{\varrho'^2}=0,\quad \iint \frac{d o \cos(\varrho, N)}{\varrho^2}=4\pi.$$

Mithin gehen die Gleichungen (6) in folgende über:

$$(7)\quad \iint \frac{V_a}{\partial N}\,d o=0,\quad \iint \frac{\partial V_i}{\partial N}\,d o=-4\pi \sum \mu=-4\pi M_i,$$

d. h. Satz: Für das Potential V von Massen, die ganz außerhalb der geschlossenen Fläche F liegen, hat das über F erstreckte Integral $\iint \frac{\partial V}{\partial N} d o$ den Wert Null, während für Massen, die innerhalb F liegen, jenes Integral den Wert -4π mal der Gesamtmasse hat.

Daß der Beweis auch gilt, wenn an Stelle einzelner Massenpunkte räumliche oder auf Flächen ausgebreitete Massen treten, läßt sich genau so wie bei Satz 1 zeigen. Die räumlichen Massen können auch bis an F heranreichen. Dagegen ist der Fall von Massen, die auf F selbst aus-

gebreitet sind, ausdrücklich auszuschließen, da für diese $\frac{\partial V}{\partial N}$ in den Punkten von F zwei verschiedene Werte hat.

Wird in dem obigen Resultat die äußere Flächennormale N durch die innere Normale ν ersetzt, so treten an Stelle der Gleichungen (7) die folgenden:

$$\text{(7a)} \qquad \iint \frac{\partial V_a}{\partial \nu} d o = 0, \iint \frac{\partial V_i}{\partial \nu} d o = + 4\pi M_i .$$

Satz 3. Das Potential von Massen, die sämtlich außerhalb eines zusammenhängenden Raumes liegen, kann nicht in einem Teile dieses Raumes einen konstanten Wert und zugleich in einem anderen Teile desselben einen verschiedenen Wert haben.

Beweis. Es sei T der betrachtete, von Massen freie Raum, V das Potential der außerhalb T liegenden Massen für innere Punkte von T; ferner sei T_1 der Teil von T, in dem V überall den konstanten Wert C hat. Hat V außerhalb T_1 andere Werte als C, so ist der Übergang zu diesen Werten kontinuierlich. In der Nähe der Grenzfläche von T_1 kann V sich nur sehr wenig von C unterscheiden, und dieser Unterschied kann teils positiv, teils negativ sein. An T_1 werden daher Teile von T stoßen, in denen $V > C$, andere Teile, in denen $V < C$ ist. Es sei nun T_2 ein an T_1 angrenzender Teil von T, in dem $V > C$ ist. Dann beschreibe man um einen passend gewählten Punkt O von T_1 eine Kugel, die ganz in T_1 und T_2 liegt. Ist R der Radius dieser Kugel, so hat, da die wirkenden Massen außerhalb der Kugel liegen, das über die Kugelfläche erstreckte Integral $\iint V d o$ nach Satz 1 den Wert $4\pi R^2 C = C \iint d o$, da ja C der Wert von V im Kugelmittelpunkte O ist; d. h. es ist das über die Kugelfläche erstreckte Integral

$$\iint (V - C) d o = 0 .$$

Die Kugelfläche liegt nun teils in T_1, und dort ist $V - C = 0$, teils aber liegt sie in T_2, und dort ist überall $V - C > 0$. Es kann daher $\iint (V - C) d o$ nicht $= 0$ sein. Die Annahme, daß in T_2 $V > C$ sei, führt also zu einem Wider-

spruch. Zu demselben Widerspruch würde die Annahme führen, daß in T_2 $V < C$ sei. Es kann also keinen an T_1 grenzenden, innerhalb T liegenden Raumteil geben, in dem V einen anderen Wert als C hätte. Durch Betrachtung der an T_2 grenzenden Teile T_3 von T, dann der an T_3 grenzenden usw. kann man das Resultat auf den ganzen Raum T ausdehnen.

In bezug auf den Raum T sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. T ist ein endlicher, von einer geschlossenen Fläche F begrenzter Raum, und die wirkenden Massen liegen außerhalb F.

2. T ist der außerhalb F sich ins Unendliche erstreckende Raum, und die wirkenden Massen liegen innerhalb F. Im letzteren Falle kann der konstante Wert, den V in T haben soll, nur $=0$ sein, da V im Unendlichen verschwindet.

Im ersteren Falle ist, damit V in T konstant sei, nur erforderlich, daß V in allen Punkten von F den Wert C habe, wie der folgende Satz lehrt.

Satz 4. Falls das Potential von Massen, die ganz außerhalb der geschlossenen Fläche F oder auf F liegen, in allen Punkten von F einerlei Wert hat, so gilt dieser Wert auch für die sämtlichen inneren Punkte von F.

Beweis. Es sei V das Potential von Massen, die ganz außerhalb der geschlossenen Fläche F oder auf derselben liegen, C der konstante Wert, den V in allen Punkten von F hat. Auf den Raum T innerhalb F wenden wir den Greenschen Satz an [Teil I, S. 96, Gl. (1)] und setzen darin $U = W = V - C$. Dann erfüllen U und W die Bedingungen, unter denen der Greensche Satz abgeleitet war, und es wird

$$(8) \qquad \iiint (V-C)\,\Delta V\,dv = \iint (V-C)\frac{\partial V}{\partial N}do$$
$$-\iiint\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dv;$$

und zwar sind die dreifachen Integrale über den Raum T, das Doppelintegral ist über die Fläche F zu erstrecken. Da V das Potential von Massen ist, die ganz außerhalb T liegen, so ist überall in T $\Delta V=0$. Ferner ist in allen Punkten von F $V-C=0$. Somit wird

$$\text{(8a)} \qquad \iiint\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dv=0.$$

Dies Integral ist eine Summe von positiven Gliedern und kann daher nur verschwinden, wenn jeder einzelne Summand verschwindet. Es muß daher in jedem Volumenelement von T

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial V}{\partial x}=0,\ \frac{\partial V}{\partial y}=0,\ \frac{\partial V}{\partial z}=0,$$

d. h.

$$\text{(9a)} \qquad V=\text{Const},$$

sein. Für die unmittelbar an F liegenden Volumenelemente ist aber der konstante Wert von $V=C$, folglich ist überall im Innern von F

$$\text{(9b)} \qquad V=C.$$

Satz 5. Wenn von Massen, die sich nur innerhalb eines endlichen Raumes T oder auch ganz oder teilweise auf dessen Oberfläche befinden, das Potential an der Grenzfläche F von T einen konstanten Wert C hat, so hat das Potential in jedem Punkte P des äußeren Raumes T':

1. wenn $C=0$ ist, ebenfalls den Wert Null;

2. wenn C nicht $=0$ ist, einen zwischen C und Null liegenden Wert.

Beweis. 1. Es sei zunächst der konstante Wert C, den V an F annimmt, $=0$. Wäre in einem Punkte P von T' der Wert von V positiv $=A$, so hätte auf jeder von P ausgehenden Linie V in dem Punkte P den Wert A, in

einem anderen Punkte, der entweder auf F oder im Unendlichen liegt, den Wert Null. Wegen der kontinuierlichen Änderung von V müßten auf jeder dieser Linien alle Werte zwischen A und 0 auftreten. Es müßte daher auf jeder dieser Linien ein in T' liegender Punkt Q existieren, in dem V einen positiven Wert $B < A$ annehmen würde, und alle diese Punkte Q würden eine geschlossene, ganz in T' liegende Fläche F_1 bilden, an der V den konstanten Wert B hätte. Nach Satz 4 müßte dann aber, da die wirkenden Massen außerhalb F_1 liegen, V in jedem Punkte im Innern von F_1, also auch in P den Wert B haben, was der Annahme widerspricht, daß V in P den Wert $A > B$ hat. V kann somit in keinem Punkte von T' einen positiven Wert A haben. Ebenso läßt sich zeigen, daß V in keinem solchen Punkte P einen negativen Wert annehmen kann. Mithin muß in jedem Punkte P von T' V den Wert Null haben, womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist.

2. Ist der konstante Wert C, den V an F annimmt, positiv, so ist in keinem Punkte P von T' $V > C$. Denn wäre der Wert A, den V in P hat, $> C$, so müßte auf jeder von P ausgehenden Linie ein Punkt Q existieren, in dem V einen Wert B annimmt, der kleiner als A, aber größer als C ist. Diese Punkte Q würden, wie vorher, eine ganz in T' liegende geschlossene Fläche F_1 bilden, und nach Satz 4 müßte daher der Wert von V in P ebenfalls $= B$ sein, was der zugrunde gelegten Annahme widerspricht.

Ebensowenig kann V in P einen negativen Wert $-A$ besitzen. Denn dann müßte auf jeder von P ausgehenden Linie ein Punkt Q existieren, in dem V einen Wert $-B$ hätte, so daß $-A < -B < 0$ wäre. Auch hier würden die Punkte Q eine geschlossene Fläche bilden, und Satz 4 würde wieder zu einem Widerspruch gegen die zugrunde gelegte Annahme führen.

Weiter kann V in keinem im Endlichen liegenden Punkte P von T' den Wert Null besitzen. Denn wäre V_P (der Wert von V im Punkte P) $= 0$, so beschreibe man um P eine Kugel mit einem Radius R, der kleiner ist als der kleinste Abstand des Punktes P von der geschlossenen Fläche F. Ist Q ein Punkt dieser Kugel, R ihr Radius,

V_Q der Wert von V in Q, so müßte nach Satz 1 das über die Kugelfläche erstreckte Integral

$$\iint V_Q\, d\, o = 4\pi R^2 . V_P = 0 \tag{10}$$

sein. Das Integral kann aber den Wert Null nur annehmen, wenn entweder alle $V_Q = 0$ sind, oder wenn V_Q auf der Kugelfläche teils positive, teils negative Werte annehmen würde. Wäre für alle Punkte der Kugel $V_Q = 0$, so müßte auch für alle Punkte im Innern der Kugel $V = 0$ sein, daher müßte nach Satz 3 V im ganzen betrachteten Raume $T' = 0$ sein, auch an seiner Grenzfläche F, was der Voraussetzung widerspricht. Wäre V_Q auf der Kugel teils positiv, teils negativ, so gäbe es in T' Punkte, in denen V negativ wäre, was nach dem Vorhergehenden ausgeschlossen ist.

Daß endlich V auch in keinem Punkte P von T' den Wert C selbst annehmen kann, läßt sich in ähnlicher Art zeigen. Beschreibt man nämlich um P wieder die eben benutzte Kugel, so müßte das über die Kugelfläche erstreckte Integral

$$\iint V_Q\, d\, o = 4\pi R^2 . C \tag{11}$$

sein, oder es müßte

$$\iint (V_Q - C)\, d\, o = 0 \tag{11a}$$

sein. Dazu müßte aber entweder $V_Q - C$ für alle Punkte Q der Kugelfläche $= 0$ sein, daher müßte $V - C$ im ganzen Innern der Kugel verschwinden. V würde also in einem Teile von T', daher nach Satz 3 überall in T' dén Wert C haben, was für den sich ins Unendliche erstreckenden Raum T' und $C > 0$ unmöglich ist. Oder es müßte, damit (11a) bestehen kann, $V_Q - C$ teils positive, teils negative Werte auf der Kugel haben, d. h. es würde Punkte Q in T' geben, für die $V > C$, was nach dem oben Erörterten ausgeschlossen ist.

Alles in allem kann also, wenn der konstante Wert C, den V an F hat, positiv ist, V in keinem im Endlichen liegenden Punkte P von T' einen positiven Wert $> C$, ebensowenig einen negativen Wert oder den Wert Null annehmen, schließlich auch nicht den Wert C selbst.

In allen Punkten P von T' kann daher V nur einen zwischen C und 0 liegenden Wert besitzen.

Ganz ebenso läßt sich der Beweis führen, falls die gegebene Konstante C negativ ist.

Zusatz. Der erste Fall $C=0$ kann nur eintreten, wenn die Summe aller wirkenden Massen $=0$ ist, der Fall $C \gtreqless 0$ nur, wenn diese Summe nicht $=0$ ist.

Beweis. Man beschreibe eine Kugel, die die Fläche F ganz umschließt. Nach Satz 1 wird dann das über die Kugelfläche erstreckte Integral, da die Gesamtmasse M innerhalb der Kugel liegt,

$$(12) \qquad \iint V\, d o = 4 \pi R M,$$

worin R den Radius der Kugel bezeichnet. Ist nun $C=0$, so ist V in allen Punkten außerhalb F, also auch in allen Punkten der Kugelfläche R gleich Null, mithin verschwindet das Integral der linken Seite von (12) und daher ist $M=0$. Ist $C \gtreqless 0$, so liegen alle Werte, die V auf der Kugelfläche annimmt, zwischen 0 und C. Die linke Seite von (12) ist daher von Null verschieden und für positive C positiv, für negative C negativ. M ist somit von 0 verschieden und hat stets das Vorzeichen von C.

Satz 6. In Punkten, die einen endlichen Abstand von der wirkenden Masse haben, kann das Potential dieser Masse keinen extremen Wert besitzen.

Beweis. Ist V_P der Potentialwert in einem Punkte P, der einen endlichen Abstand von der Masse hat, beschreibt man ferner um P eine Kugel mit einem Radius R, der kleiner ist als der kleinste Abstand des Punktes P von der Masse, und ist Q ein Punkt dieser Kugel, V_Q der Wert von V in Q, so ist nach Satz 1 das über die Kugelfläche erstreckte Integral

$$(13) \qquad \iint V_Q\, d o = 4 \pi R^2 V_P = V_P \iint d o = \iint V_P\, d o$$

oder

$$(13\text{a}) \qquad \iint (V_Q - V_P)\, d o = 0 .$$

Zur Erfüllung der Gleichung (13a) ist entweder nötig, daß für alle Punkte der Kugelfläche $V_Q = V_P$ ist, oder daß $V_Q - V_P$ auf der Kugelfläche teils positive, teils negative Werte annimmt. Im letzteren Falle existieren auf der Kugel Punkte, in denen V einen größeren, andere, in denen V einen kleineren Wert als in P hat; V_P kann daher, da dies auch für Kugeln von beliebig kleinem Radius gilt, keinen extremen Wert darstellen. Im ersteren Falle aber hätte V auf allen Punkten der Kugelfläche R, daher im ganzen Inneren (Satz 4) denselben Wert, und daher müßte nach Satz 3 V in dem ganzen Raume, dem P angehört, konstant sein. Auch in diesem Falle ist V_P kein extremer Wert.

Extreme Werte des Potentials können daher nur in Punkten der wirkenden Masse, eventuell im Unendlichen auftreten. Für Massen, die sämtlich positiv sind, hat V überall einen positiven Wert; das Minimum von V, nämlich der Wert Null, findet im Unendlichen statt, das Maximum in einem Punkte der Masse.

Kapitel 2.

Lösung der Randwertaufgaben mittels der Greenschen Funktion.

a) Lösung für den Innenraum T einer geschlossenen Fläche F.

Es sei T ein endlicher, einfach zusammenhängender Raum, der von der geschlossenen Fläche F begrenzt wird. Wir wenden auf T diejenige Folgerung des Greenschen Satzes an, die durch die Gleichung (5), S. 98 von Teil I ausgedrückt wird, indem wir für die Funktion U jener Gleichung das Potential V von Massen setzen, die außerhalb T liegen, die Funktion W aber $= \frac{1}{\varrho'}$, wo ϱ' den Abstand eines außerhalb F gelegenen Punktes P' von einem inneren Punkte von T bezeichnet. Beide Funktionen genügen dann in T den Bedingungen, unter denen der Greensche Satz abgeleitet war; ferner ist überall im

Innern von T $\Delta U = \Delta V = 0$, $\Delta W = \Delta\left(\frac{1}{\varrho'}\right) = 0$, und aus der zitierten Gleichung folgt:

$$(1)\qquad \iint\limits_F \left(V \frac{\partial \frac{1}{\varrho'}}{\partial N} - \frac{1}{\varrho'} \frac{\partial V}{\partial N} \right) do = 0$$

(N die äußere Normale von F). Wird aber $W = 1 | \varrho$ gesetzt, wo ϱ den Abstand eines innerhalb F, also in T gelegenen Punktes P von einem anderen inneren Punkte von T bezeichnet, so kann der Greensche Satz, da $1 | \varrho$ in einem Punkte von T unendlich wird, erst angewandt werden, wenn der Punkt P und seine unmittelbare Umgebung aus dem Integrationsgebiet ausgeschlossen werden. Die Ausschließung erfolge durch eine Kugel K, deren Mittelpunkt in P und deren Radius δ sehr klein ist. Das Gebiet, in das T nach Ausschluß des Innern von K übergeht, werde mit T_1 bezeichnet. In T_1 ist dann $W = 1 | \varrho$ nebst allen seinen Ableitungen endlich und stetig. Wird wieder für U das Potential V von Massen gesetzt, die außerhalb T liegen, so kann die oben benutzte Folgerung des Greenschen Satzes auf den Raum T_1 angewandt werden. Dabei ist zu beachten, daß T_1 von zwei Flächen begrenzt wird, der Fläche F und der Kugel K. Unterscheiden wir die Flächen dadurch, daß wir mit do auch jetzt ein Flächenelement von F bezeichnen, ein Flächenelement von K aber mit do', so ergibt die zitierte Gleichung,

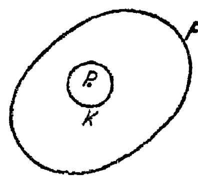

Fig. 13

da in T_1 $\Delta U = \Delta V = 0$, $\Delta W = \Delta\left(\frac{1}{\varrho}\right) = 0$ ist:

$$(2)\quad \iint\limits_F \left(V \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial N} \right) do + \iint\limits_K \left(V \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial N} \right) do' = 0.$$

An der Kugel K ist $\varrho = \delta$ und $do' = \delta^2 d\omega$, wo $d\omega$ das Flächenelement einer Kugel vom Radius 1 bedeutet. Ferner

ist dort, da N die äußere Normale des Integrationsraums, mithin die innere Normale von K bezeichnet,

$$\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N} = \left[\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial(-\varrho)}\right]_{\varrho=\delta} = \frac{1}{\delta^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial N} = \frac{\partial V}{\partial(-\varrho)} = -\frac{\partial V}{\partial \varrho}.$$

Daher ist der zweite Summand der rechten Seite von (2)

$$\text{(2a)} \qquad \iint \left[V_{\varrho=\delta} + \delta\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=\delta}\right] d\omega,$$

und die Integration ist über eine Kugel vom Radius 1 zu erstrecken. Addiert und subtrahiert man unter dem Integral V_P, d. i. den Wert, den V im Mittelpunkte P der Kugel hat, so wird das Integral (2a):

$$\text{(2b)} \quad \iint V_P\, d\omega + \iint \left[V_{\varrho=\delta} - V_P + \delta\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=\delta}\right] d\omega.$$

V_P hat für alle $d\omega$ den gleichen Wert; daher wird der erste Summand von (2b): $V_P \iint d\omega = 4\pi V_P$. Weiter wird, falls man δ immer mehr verkleinert, $V_{\varrho=\delta} - V_P$ beliebig klein wegen der kontinuierlichen Änderung von V; $\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=\delta}$ ist endlich. Daher wird der zweite Summand von (2b), wenn δ sich beliebig der 0 nähert, beliebig klein, d. h. es wird

$$\text{(2c)} \qquad \lim_{\delta=0} \iint\limits_{K} \left[V \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial N}\right] do' = 4\pi V_P,$$

und Gleichung (2) geht für den Grenzfall $\delta = 0$ in folgende über:

$$\text{(3)} \qquad V_P = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{F} \left(V \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial N}\right) do.$$

Diese Gleichung gilt für beliebige innere Punkte P von T.

Aus (3) würde sich also der Wert ergeben, den V in irgendeinem inneren Punkte von T annimmt, falls die Werte von V und $\frac{\partial V}{\partial N}$ an der Fläche F gegeben sind.

Es soll nunmehr die Forderung fortgebracht werden, daß zur Bestimmung von V_P neben V auch $\frac{\partial V}{\partial N}$ an F gegeben sein soll. Zu dem Zwecke betrachten wir eine Funktion G, die innerhalb des Raumes T der Laplaceschen Gleichung $\Delta G = 0$ genügt, die ferner auch alle übrigen charakteristischen Eigenschaften des Potentials (für Punkte außerhalb der Masse) besitzt, und die an F den Wert $1|\varrho$ annimmt. [$1|\varrho$ selbst hat diese Eigenschaften nicht, da es im Punkte P nebst seinen Ableitungen unendlich groß wird.] Man kann dann die zugrunde gelegte Folgerung des Greenschen Satzes auf den Raum T anwenden, indem man $U = V$, $W = G$ setzt, und erhält:

$$(4) \qquad \iint_F \left[V\frac{\partial G}{\partial N} - G\frac{\partial V}{\partial N}\right] d o = 0 .$$

Addiert man die mit $1|4\pi$ multiplizierte Gleichung (4) zu (3) und beachtet, daß für alle Punkte von F $G = \frac{1}{\varrho}$ ist, so ergibt sich:

$$(5) \quad V_P = \frac{1}{4\pi}\iint_F V \frac{\partial\left(G - \frac{1}{\varrho}\right)}{\partial N} d o = \frac{1}{4\pi}\iint_F V \frac{\partial \mathfrak{G}_P}{\partial N} d o .$$

Die Funktion

$$(6) \qquad \mathfrak{G}_P = G - \frac{1}{\varrho}$$

heißt die Greensche Funktion des Raumes T, der Punkt P, von dem aus ϱ gerechnet wird, der Pol der Greenschen Funktion. Diese hat für alle Punkte von T die charakteristischen Eigenschaften des Potentials, mit Ausnahme des Pols, wo sie unendlich wird, und sie verschwindet für Punkte der Grenzfläche von T. Ist für eine beliebige Lage des Pols P der Wert von $\mathfrak{G}_P$ bekannt, so erhält man

mittels (5) den Wert, den V in P annimmt, falls nur die Werte von V an der Grenzfläche F von T gegeben sind. Durch (5) ist also die Lösung der Randwertaufgabe für den Raum T auf die Kenntnis der Greenschen Funktion dieses Raumes zurückgeführt.

Zusatz. Der Einfachheit halber war angenommen, daß T ein einfach zusammenhängender, von einer einzigen geschlossenen Fläche F begrenzter Raum sei. Das Resultat läßt sich ohne weiteres auf einen Raum T ausdehnen, der innerhalb F, aber außerhalb der Flächen F_1, F_2 liegt, die ihrerseits beide ganz innerhalb F gelegen sind. Denn der Greensche Satz und seine Folgerungen gelten auch für einen solchen Raum. In diesem Falle muß nur G an jeder der Flächen F, F_1, F_2 den Wert $1|\varrho$ annehmen, und die Integration in (5) ist über die sämtlichen Flächen F, F_1, F_2 zu erstrecken.

Die Zahl der Flächen F_1, F_2 kann eine beliebige sein, ohne daß sich an der Argumentation etwas ändert.

b) Lösung für den Außenraum einer geschlossenen Fläche F.

Der Greensche Satz und seine Folgerungen gelten nicht nur für den endlichen Raum T, der von der geschlossenen Fläche F begrenzt wird, sondern auch für den Raum T', der sich außerhalb F oder auch außerhalb mehrerer geschlossener Flächen $F, F_1, \ldots$, von denen jede ganz außerhalb der anderen liegt, ins Unendliche erstreckt, falls nur U und W in T' die für die Anwendung des Greenschen Satzes erforderlichen Eigenschaften besitzen, und falls außerdem U und W im Unendlichen sich so verhalten, wie Potentiale von Massen, die ganz im Endlichen liegen.

Um das zu zeigen, betrachten wir zunächst nicht den unendlichen Raum T', sondern einen endlichen Raum T_1', der außen von einer Kugel K mit sehr großem Radius R begrenzt wird, die die Flächen $F, F_1, \ldots$ ganz umschließt. Auf diesen endlichen Raum ist der Greensche Satz ohne weiteres anzuwenden, und die darin auftretenden Oberflächenintegrale sind außer über die Flächen $F, F_1, \ldots$ noch

über die Kugel K zu erstrecken. In dem über K erstreckten Integral

$$(7) \qquad \iint\left(U\frac{\partial W}{\partial N} - W\frac{\partial U}{\partial N}\right)do$$

ist nun $do = R^2 d\omega$, wo $d\omega$ das Flächenelement einer Kugel vom Radius 1 ist; ferner ist

$$U = \frac{C}{R}(1+\varepsilon),\quad W = \frac{C_1}{R}(1+\varepsilon_1),$$

wo ε und ε_1 Größen sind, die mit wachsendem R immer kleiner werden und für $R = \infty$ verschwinden, während C und C_1 endliche, von R unabhängige Größen darstellen. Denn es müssen lim (RU) und lim (RW) für $R = \infty$ endlich bleiben. Desgleichen sind, wenn c, c_1 andere endliche, von R unabhängige Größen bezeichnen, ε' und ε'_1 Größen, die mit wachsendem R beliebig klein werden:

$$\frac{\partial U}{\partial N} = \frac{c}{R^2}(1+\varepsilon'),\quad \frac{\partial W}{\partial N} = \frac{c_1}{R^2}(1+\varepsilon'_1),$$

da $\lim\left(R^2\frac{\partial U}{\partial x}\right)$ und daher auch $\lim\left(R^2\frac{\partial U}{\partial N}\right)$, sowie $\lim\left(R^2\frac{\partial W}{\partial N}\right)$ für $R = \infty$ endlich bleiben müssen (vgl. Teil I, S. 38—41). Mithin wird das Integral (7):

$$(7\,a) \quad \frac{1}{R}\iint\left[C c_1(1+\varepsilon)(1+\varepsilon'_1) - C_1 c(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon')\right]d\omega.$$

Läßt man nun den Raum T_1' in T' ubergehen, indem man R über alle Grenzen wachsen läßt, so wird $\frac{1}{R} = 0$, während der Faktor von $\frac{1}{R}$ endlich bleibt, also verschwindet das uber die Kugel K erstreckte Integral, es bleiben nur die über die endlichen Flächen $F, F_1, \ldots$ erstreckten übrig.

Nunmehr können wir auf den Raum T' die Folgerung des Greenschen Satzes genau ebenso anwenden wie vorher in a) auf den Raum T und erhalten für T' analoge

Resultate. Ist V das Potential von Massen, die ganz außerhalb T', d. h. innerhalb der geschlossenen Flächen $F, F_1, \ldots$ liegen, ist ferner P' irgendein Punkt von T', $V_{P'}$ der Wert, den V in P' annimmt, ϱ' der Abstand des Punktes P' von einem Punkte einer der Grenzflächen $F, F_1, \ldots$, so gilt für jeden Punkt P' von T' die zu (3) analoge Gleichung

$$(3\text{a}) \qquad V_{P'} = -\frac{1}{4\pi}\iint\left[V\frac{\partial \frac{1}{\varrho'}}{\partial \nu} - \frac{1}{\varrho'}\frac{\partial V}{\partial \nu}\right] do,$$

worin die Integration uber alle Grenzflächen $F, F_1, \ldots$ von T' zu erstrecken ist, während ν die innere Normale der betreffenden Fläche bezeichnet. Denn in dem Greenschen Satze bezeichnete N die äußere Normale des Integrationsraums, und das ist die innere Normale von F, resp. $F_1, \ldots$ Ist nun für den Raum T' eine Funktion G' bekannt, die in T' alle charakteristischen Eigenschaften des Potentials (auch die des Verschwindens im Unendlichen) besitzt, und die an jeder der Flächen $F, F_1, \ldots$ den Wert $1 | \varrho'$ annimmt, so ist

$$(4\text{a}) \qquad \iint\left(V\frac{\partial G'}{\partial \nu} - G'\frac{\partial V}{\partial \nu}\right) do = 0,$$

wobei die Integration über dieselben Flächen zu erstrecken ist wie in (3a). Aus (3a) und (4a) folgt

$$(5\text{a}) \qquad V_{P'} = \frac{1}{4\pi}\iint V\frac{\partial \mathfrak{G}'_{P'}}{\partial \nu}\, do,$$

wo

$$(6\text{a}) \qquad \mathfrak{G}'_{P'} = G' - \frac{1}{\varrho'},$$

die Greensche Funktion für den Raum T' ist, P' deren Pol. $\mathfrak{G}'$ hat für den Raum T' dieselben Eigenschaften, die vorher $\mathfrak{G}$ für den Raum T hatte, und dazu die Eigenschaft, im Unendlichen so zu verschwinden, daß

$$\lim_{r=\infty} r\,\mathfrak{G}'$$

endlich ist.

c) Die zweite Randwertaufgabe und die zweite Greensche Funktion.

Wir betrachten zunächst den Raum T', der sich außerhalb der Flächen $F, F_1, ..$ ins Unendliche erstreckt, nehmen aber an Stelle der Funktion G' von Nr. b) eine andere Funktion $\overline{G'}$, die, wie G', alle charakteristischen Eigenschaften des Potentials besitzt, aber die Eigenschaft hat, daß an den Flächen $F, F_1, ..$ $\frac{\partial \overline{G'}}{\partial \nu}$ gleich $\frac{\partial \frac{1}{\varrho'}}{\partial \nu}$ wird. (ϱ', ν haben dieselbe Bedeutung wie in b), ebenso weiterhin V.) Auch für diese Funktion gilt die Gleichung (4a), d. h. es ist

$$\text{(4b)} \qquad \iint\left(V\frac{\partial \overline{G'}}{\partial \nu} - \overline{G'}\frac{\partial V}{\partial \nu}\right) d\,o = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $1 | 4\pi$, addiert sie dann zur Gleichung (3a) von b) und beachtet, daß an den Flächen $F, F_1, ..$

$$\frac{\partial \overline{G'}}{\partial \nu} = \frac{\partial \frac{1}{\varrho'}}{\partial \nu}$$

wird, so folgt

$$\text{(5b)} \qquad V_{P'} = \frac{1}{4\pi}\iint\left(\frac{1}{\varrho'} - \overline{G'}\right)\frac{\partial V}{\partial \nu}\,d\,o = -\frac{1}{4\pi}\iint \overline{\mathfrak{G}'}_{P'}\frac{\partial V}{\partial \nu}\,d\,o.$$

Die Funktion

$$\text{(6b)} \qquad \overline{\mathfrak{G}'}_{P'} = \overline{G'} - \frac{1}{\varrho'}$$

heißt die zweite Greensche Funktion des Raumes T' und hat die gleichen Eigenschaften wie vorher $\mathfrak{G}'_{P'}$, nur wird an den Grenzflächen von T' die normale Ableitung von $\overline{\mathfrak{G}'}$ gleich Null, nicht diese Funktion selbst. Die Gleichung (5b) löst die Aufgabe, für den Raum T' eine Potentialfunktion zu bestimmen, falls deren normale Ableitungen an den Grenzflächen von T' gegeben sind, und falls für beliebige Punkte P' von T' die zweite Greensche Funktion bekannt ist.

Für den Innenraum T der geschlossenen Fläche F muß die zweite Randwertaufgabe und ebenso auch die Definition der zweiten Greenschen Funktion etwas modifiziert werden. Ist V eine Potentialfunktion von T, so kann man V ansehen als das Potential von Massen, die ganz außerhalb F liegen; für jede solche Funktion V ist aber nach dem Satze 2 des ersten Kapitels [S. 217, erste Gleichung (7)]

$$\iint_F \frac{\partial V}{\partial N} d o = 0 \tag{8}$$

(N die äußere Normale von F). Soll daher der Wert von V für Punkte von T aus den Werten bestimmt werden, die $\frac{\partial V}{\partial N}$ an F annimmt, so dürfen diese Werte nicht beliebig gewählt werden, vielmehr sind nur solche Werte zulässig, die der Gleichung (8) genügen. Ist das nicht der Fall, sondern ist $\frac{\partial V}{\partial N}$ an F gleich einer beliebig gegebenen (endlichen und kontinuierlichen) Funktion f der Koordinaten der Punkte von F, so muß man die zweite Randwertaufgabe anders fassen, nämlich so: An F soll

$$\frac{\partial V}{\partial N} = f + C$$

sein, wo C eine noch zu bestimmende Konstante ist. Gibt man dieser den Wert

$$C = \frac{-\iint f d o}{\iint d o},$$

so ist die Gleichung (8) erfüllt.

Sucht man nun für T eine Funktion $\overline{G}$, die alle charakteristischen Eigenschaften des Potentials hat, so muß auch diese der Gleichung (8) genügen, d. h. es muß

$$\iint_F \frac{\partial \overline{G}}{\partial N} d o = 0 \tag{8a}$$

sein. Würde man verlangen, daß an F

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial N} = \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N}$$

wird, wo ϱ den Abstand eines inneren Punktes P von T von dem Flächenelement do bezeichnet, so würde die Gleichung (8a) nicht erfüllt; denn es ist (vgl. Teil I, S. 70 und S. 153—154)

$$\iint\limits_F \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N}\, do = -\iint\limits_F \frac{\cos(\varrho, N)}{\varrho^2}\, do = -4\pi,$$

da ϱ von einem inneren Punkte ausgeht. Damit (8a) erfüllt wird, definieren wir daher für den Innenraum T von F die Funktion $\overline{G}$ dadurch, daß sie in F alle charakteristischen Eigenschaften des Potentials besitzt, und daß an der Grenzfläche F von T

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial N} = \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N} + K \tag{9}$$

wird, wo K eine noch zu bestimmende Konstante ist. Damit die Gleichung (8a) erfüllt wird, muß

$$K = +\frac{4\pi}{F} \tag{9a}$$

sein, falls F den Flächeninhalt der Fläche F bezeichnet.

Für die Funktion $\overline{G}$ gilt dieselbe Gleichung, wie für G [Gl. (4), S. 227], d. h. es ist

$$\iint\limits_F \left[V \frac{\partial \overline{G}}{\partial N} - \overline{G}\frac{\partial V}{\partial N}\right] do = 0. \tag{4c}$$

Aus (4c) und der Gleichung (3), die ja für unsern Raum T gilt, folgt, da für alle Punkte von F die Gleichung (9) gilt:

(10) $$V_P = \frac{K}{4\pi} \iint\limits_F V\, do - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_F \frac{\partial V}{\partial N} \left(\overline{G} - \frac{1}{\varrho} \right) do .$$

Weiter ist der Wert des Integrals

$$\iint\limits_F V\, do$$

von der Lage des Punktes P unabhängig, ist also, wenn P seine Lage ändert, konstant; allerdings ist der Wert dieser Konstante unbekannt, da die Werte von V an F nicht gegeben sind. Wird diese Konstante mit C_1 bezeichnet, so wird

(10a) $$V_P = C_1 - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_F \overline{\mathfrak{G}}_P \frac{\partial V}{\partial N} do ,$$

wo

(11) $$\overline{\mathfrak{G}}_P = \overline{G} - \frac{1}{\varrho}$$

die zweite Greensche Funktion für den Innenraum T von F ist. Durch (10a) ist V für alle Punkte P von T, falls $\frac{\partial V}{\partial N}$ an F gegeben und $\overline{\mathfrak{G}}_P$ bekannt ist, bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Bemerkung. Bei der Behandlung der zweiten Randwertaufgabe für den Außen- und Innenraum einer Kugel [s. S. 123 ff.] trat derselbe Unterschied in der Fassung der Aufgabe hervor, ebenso die Modifikation in der Definition der zweiten Greenschen Funktion für den Innenraum der Kugel (s. S. 128).

d) Eigenschaften der Greenschen Funktion.

Die erste Greensche Funktion für den Innenraum T einer geschlossenen Fläche F,

$$\mathfrak{G}_P = G - \frac{1}{\varrho},$$

hängt, wie ϱ, sowohl von den Koordinaten des Pols P ab, als von den Koordinaten des Punktes Q, für den der Wert

von $\mathfrak{G}$, resp. G gesucht wird, des Aufpunktes. Das soll dadurch ausgedrückt werden, daß zu G und $\mathfrak{G}$ als Index der Pol P hinzugesetzt wird, als Argument der Punkt Q; $\mathfrak{G}_P(Q)$ und $G_P(Q)$ sollen also die Werte bezeichnen, die die Funktionen $\mathfrak{G}$ und G in Q annehmen, falls P der Pol ist. Dann gilt der Satz:

$$G_P(Q) = G_Q(P), \quad \mathfrak{G}_P(Q) = \mathfrak{G}_Q(P), \tag{12}$$

d. h. ebenso wie $\varrho = \overline{PQ}$ sind die Funktionen $\mathfrak{G}$ und G symmetrische Funktionen der Koordinaten der Punkte P und Q.

Beweis. Man beschreibe um P sowohl, als um Q je eine Kugel mit den sehr kleinen Radien δ, δ_1. Auf den Raum T_2, der aus T entsteht, wenn man das Innere dieser Kugeln K, K_1 aus T ausschließt, wende man die schon oben benutzte Folgerung des Greenschen Satzes [Teil I, S. 98, Gl. (5)] an, indem man

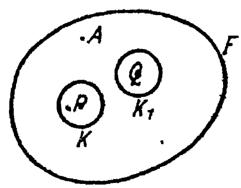

Fig. 14.

$$U = \mathfrak{G}_P(A) = G_P(A) - \frac{1}{\varrho}, \quad W = \mathfrak{G}_Q(A) = G_Q(A) - \frac{1}{R} \tag{13}$$

setzt, wo A einen beliebigen Punkt von T_2 bezeichnet, ϱ seinen Abstand von P, R seinen Abstand von Q. Diese Funktionen U, W haben in T_2 alle für die Gültigkeit des Greenschen Satzes erforderlichen Eigenschaften, ferner ist in T_2 $\Delta U = 0$, $\Delta W = 0$. Die in unserer Formel auftretenden Raumintegrale verschwinden daher; die Oberflächenintegrale sind zu erstrecken: 1. über die Fläche F, 2. über die Oberfläche der um P beschriebenen Kugel K, 3. über die Fläche der um Q beschriebenen Kugel K_1. Von diesen drei Integralen wird das erste $= 0$, da an F die Funktionen U und W verschwinden. Es muß daher die Summe aus dem zweiten und dritten Integral verschwinden.

In dem zweiten Integral ist $d o = \delta^2 \, d\omega$, wo wieder $d\omega$ das Flächenelement einer Kugel vom Radius 1 bezeichnet, ferner ist dort $\varrho = \delta$, und N, die äußere Normale

des Integrationsraums, hat die Richtung des abnehmenden ϱ. Jenes zweite Integral wird somit

$$(14)\quad \iint\left\{-\left[G_P(A)-\frac{1}{\varrho}\right]\frac{\partial\left(G_Q(A)-\frac{1}{R}\right)}{\partial\varrho}\right.$$
$$\left.+\left(G_Q(A)-\frac{1}{R}\right)\left(\frac{\partial G_P(A)}{\partial\varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\right)\right\}_{\varrho=\delta}\delta^2\,d\omega,$$

worin A jetzt einen Punkt von K bezeichnet. Läßt man nun δ immer kleiner werden, so wird $\frac{1}{\varrho}\delta^2=\frac{1}{\delta}\delta^2=\delta$ beliebig klein, $\frac{1}{\varrho^2}\delta^2=\frac{1}{\delta^2}\delta^2=1$, während $G_P(A)$, $\frac{\partial G_P(A)}{\partial\varrho}$, $G_Q(A)-\frac{1}{R}$ und $\frac{\partial\left(G_Q(A)-\frac{1}{R}\right)}{\partial\varrho}$ endlich bleiben. Im Grenzfall $\delta=0$ geht zugleich der Punkt A in P, R in den Abstand $\overline{QP}$ über. Die Grenze des Integrals (14) für $\delta=0$ ist daher, da $\iint d\omega=4\pi$ ist:

$$(14\text{a})\qquad \left[G_Q(P)-\frac{1}{\overline{QP}}\right]4\pi.$$

Ebenso wird der Grenzwert des dritten Integrals für $\delta_1=0$

$$(14\text{b})\qquad -\left[G_P(Q)-\frac{1}{\overline{QP}}\right]4\pi.$$

Nach dem, was oben bemerkt, muß die Summe der Ausdrücke (14a) und (14b) verschwinden, d. h. es ist

$$G_Q(P)=G_P(Q),\quad \mathfrak{G}_Q(P)=\mathfrak{G}_P(Q).$$

Der Beweis gilt ohne jede Änderung auch für die erste Greensche Funktion des Außenraumes T' von T, ebenso des Außenraumes mehrerer Flächen. Er läßt sich leicht auch auf die zweite Greensche Funktion ausdehnen.

e) Existenz der Greenschen Funktion.

Mit dem Vorstehenden ist die Auffindung der Werte von V für irgendeinen Raum, falls die Werte von V oder von $\frac{\partial V}{\partial N}$ an der oder den Grenzflächen dieses Raumes gegeben sind, zurückgeführt auf die Ermittelung der ersten, resp. der zweiten Greenschen Funktion dieses Raumes. Für manche einfachen Fälle, wie für Räume, die von Kugeln begrenzt sind, kann man diese Funktionen ermitteln (vgl. Abschnitt II). Es fragt sich nun, ob diese Greenschen Funktionen für jeden von einer oder mehreren Flächen begrenzten endlichen oder sich ins Unendliche erstreckenden Raum existieren. Kann man ihre Existenz nachweisen, so ist durch die vorstehenden Betrachtungen gezeigt, daß für den betreffenden Raum eine Potentialfunktion (über deren Definition vgl. S. 213) durch ihre Werte an den Grenzflächen des Raumes oder durch die Werte ihrer normalen Ableitungen an diesen Flächen völlig bestimmt ist (im letzteren Falle für endliche Räume bis auf eine additive Konstante).

Die Existenz der ersten Greenschen Funktion hat Green lediglich durch ihre physikalische Bedeutung zu begründen gesucht. Diese ist für den Innenraum T einer geschlossenen Fläche F folgende: Man denke F als innere Grenze eines Leiters, der außerhalb F sich ins Unendliche erstreckt, oder auch eines schalenförmigen Leiters, der mit der Erde leitend verbunden ist. Man denke sich ferner in dem innerhalb F gegebenen Punkt P die elektrische Masse -1 konzentriert. Diese wirkt influenzierend auf den Leiter, die der Masse in P gleichnamige Elektrizität wird zur Erde abgeleitet, die entgegengesetzte verteilt sich auf F. Das Potential dieser Verteilung sei U, und zwar U_a für äußere, U_i für innere Punkte von F. Dann muß $U_a - \frac{1}{\varrho}$ für alle Punkte des Leiters $= 0$ sein (ϱ der Abstand des Leiterpunktes von P). Wegen der Eigenschaften des Flächenpotentials ist an F auch $U_i - \frac{1}{\varrho} = 0$, während für alle Punkte innerhalb F, auch für den Punkt P, U_i alle charakteristischen

Eigenschaften des Potentials besitzt. $U_i - \frac{1}{\varrho}$ ist aber die Greensche Funktion für den Innenraum von F. Green schließt: Existiert für den Leiter elektrisches Gleichgewicht, so existiert auch für den Innenraum von F die erste Greensche Funktion.

Diese Argumentation läßt sich leicht auf den Außenraum von F, sowie auf Räume, die von mehreren Flächen begrenzt sind, übertragen. Auch die Existenz der zweiten Greenschen Funktion läßt sich physikalisch begründen.

Kapitel 3.

Das Dirichletsche Prinzip nebst Folgerungen.

a) Das Dirichletsche Prinzip für einen endlichen Raum.

Rein analytisch ist die Existenz der Greenschen Funktion durch eine Schlußweise begründet, die zuerst Dirichlet benutzt hat, um für beliebige Räume die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der ersten Randwertaufgabe nachzuweisen. Den Ausgangspunkt bildet die Bemerkung, daß die Laplacesche Gleichung $\Delta U = 0$ die Lösung einer Aufgabe der Variationsrechnung ist. Sucht man nämlich für irgendeinen endlichen, von der geschlossenen Fläche F begrenzten Raum T diejenige Funktion U, welche das über das Volumen von T erstreckte Integral

$$(1) \qquad I = \iiint \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] dv$$

zu einem Minimum macht und dabei an der Grenzfläche F gegebene Werte annimmt, so genügt diese Funktion der Laplaceschen Gleichung.

Beweis. Eine Funktion U, deren Werte an F gegeben sind, kann auf unendlich viele Arten so in das Innere fortgesetzt werden, daß sie dort nebst ihren Ableitungen überall endlich und stetig ist. Unter allen diesen Funktionen U soll diejenige gesucht werden, welche das Inte-

gral (1) zu einem Minimum macht. Diese Funktion sei V, und für $U=V$ sei der Wert des Integrals $(1)=I_1$. Soll

(2) $$I_1=\iiint\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dv$$

ein Minimum von I sein, so muß

(3) $$I-I_1>0$$

sein für alle von V verschiedenen Funktionen U. Setzt man insbesondere

(4) $$U=V+hW,$$

wo h eine Konstante bezeichnet, W irgendeine Funktion der Koordinaten der Punkte von T, so nimmt I die Form an

(5) $$I=I_1+2hM+h^2N,$$

wo

(5a) $$\begin{cases} M=\iiint\left[\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}\right]dv, \\ N=\iiint\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]dv \end{cases}$$

ist. Soll die Ungleichung (3) für alle möglichen W und alle möglichen kleinen Werte von h erfüllt werden, so muß $M=0$ sein. Denn wählt man W so, daß für alle Punkte von T $\frac{\partial W}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial x}$, ebenso $\frac{\partial W}{\partial y}$ und $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ und $\frac{\partial V}{\partial z}$ das gleiche Vorzeichen haben, so hat M als Summe lauter positiver Größen einen positiven Wert, $2hM$ hat also das Vorzeichen von h und kann daher sowohl positiv, als negativ sein. Ferner ist für genügend kleine h der absolute Wert von $2hM$ größer als h^2N. Somit folgt aus (5), daß das Vorzeichen von $I-I_1$ von dem Vorzeichen von h abhängt. Soll die Ungleichung (3) für alle möglichen h und alle möglichen W erfüllt werden, so ist das nur möglich, wenn M verschwindet. Ist umgekehrt $M=0$, so ist (3) für alle möglichen h und W erfüllt. Damit I_1 ein Minimum von I sei, ist hiernach erforderlich

(6) $$M=0.$$

Nach dem Greenschen Satze [Teil I, S. 96, Gl. (1)] ist aber

$$M = \iint W \frac{\partial V}{\partial N} d o - \iiint W \Delta V d v, \tag{7}$$

wo das Doppelintegral über die Fläche F, das dreifache über das Volumen von T zu erstrecken ist. Nun ist an der Fläche F $W = 0$; denn alle in Betracht kommenden Funktionen U sollen an F dieselben Werte haben, also auch die Funktionen V und $V + hW$, d. h. an F ist $W = 0$, das Oberflächenintegral in (7) verschwindet. Die Gleichung (6) reduziert sich daher auf

$$\iiint W \Delta V d v = 0. \tag{7a}$$

Damit diese Bedingung für beliebige W erfüllt werde, muß für jedes Volumenelement von T $\Delta V = 0$ sein, denn man kann W so wählen, daß es überall mit ΔV gleiches Vorzeichen hat, so daß das Integral (7a) die Summe von lauter positiven Summanden ist; und eine solche Summe kann nur $= 0$ werden, wenn jeder einzelne Summand $= 0$ wird.

Wir haben somit gefunden:

1. Jede Funktion $U = V$, welche I zu einem Minimum macht und an F gegebene Werte annimmt, genügt innerhalb des Raumes T der Gleichung $\Delta V = 0$.

2. Umgekehrt macht jede Funktion V, welche in T endlich und stetig ist, an der Oberfläche gegebene Werte annimmt und der Laplaceschen Gleichung $\Delta V = 0$ genügt, das Integral I zu einem Minimum. Denn aus $\Delta V = 0$ folgt $M = 0$, daher $I - I_1 > 0$.

3. Ferner kann man zeigen, daß I nur ein Minimum besitzen kann.

Angenommen nämlich, es existierten zwei verschiedene Funktionen V und V_1, welch beide I zu einem Minimum machen, so setze man

$$V_1 = V + S. \tag{8}$$

Da I für $U = V_1$ ein Minimum sein soll, so muß, falls h klein, W eine beliebige Funktion ist, I für $U = V_1 + h W$,

also auch für $U = V_1 + hS = V + (1+h)\,S$ größer sein als für $U = V_1 = V + S$. Nun ist

$$(9)\qquad I_{U=V+(1+h)S} = I_1 + 2\,(1+h)\,M' + (1+h)^2\,N',$$

wo M' und N' die Werte sind, in welche die Integrale M, N (5a) für $W = S$ übergehen. In (9) ist aber $M' = 0$; denn für $U = V$ soll $I = I_1$ ein Minimum sein, daher ist $\Delta V = 0$, also nach (7) $M = 0$ für jedes W, auch für $W = S$. Weiter ist N' der Wert, den das Integral I für $U = S$ annimmt. (9) wird somit

$$(9\text{a})\qquad I_{U=V+(1+h)S} = I_1 + (1+h)^2\,I_{U=S}.$$

Das gilt für beliebige h, also auch für $h = 0$, d. h. es ist

$$(9\text{b})\qquad I_{U=V+S} = I_1 + I_{U=S}.$$

Soll nun

$$I_{U=V+(1+h)S} > I_{U=V+S}$$

sein, so muß auch

$$(10)\qquad (1+h)^2\,I_{U=S} > I_{U=S}$$

sein; und zwar muß diese Bedingung sowohl für positive, als für negative h erfüllt werden. Letzteres ist unmöglich. Demnach führt die Annahme, daß I außer für $U = V$ noch für eine andere Funktion $U = V + S$ ein Minimum wird, zu einem Widerspruch. I kann **nur** ein Minimum besitzen. Das Resultat dieser Betrachtung, daß es für den Raum T stets eine und nur eine Funktion V gibt, die dort die charakteristischen Eigenschaften des Potentials hat (d. h. eine Potentialfunktion), und die an der Oberfläche von T gegebene Werte annimmt, bezeichnet man als **Dirichlet**sches Prinzip.

Die **Greensche** Funktion ist ein spezieller Fall einer Potentialfunktion.

Zusatz. Ist T der Raum innerhalb der geschlossenen Fläche F, aber zugleich außerhalb anderer geschlossener Flächen $F_1, F_2, \ldots$, die ganz im Innern von F liegen, so gilt auch für diesen Fall die vorige Argumentation ohne jede Änderung. Nur müssen die Werte von V an allen Flächen $F, F_1, F_2, \ldots$ gegeben sein.

b) Ausdehnung auf Räume, die sich ins Unendliche erstrecken.

Sind $F, F_1, ..$ zwei geschlossene Flächen, deren jede ganz außerhalb der anderen liegt, und bezeichnet T' den Raum, der sich außerhalb dieser Flächen ins Unendliche erstreckt, so kann man die Aufgabe, für den Raum T' eine Potentialfunktion zu bestimmen, die an den Flächen F und F_1 gegebene Werte annimmt, mittelst der Methode der reziproken Radien auf die analoge Aufgabe für endliche Räume zurückführen. Man wähle als Transformationszentrum einen Punkt O im Innern von F. Durch die Transformation geht dann (vgl. Abschnitt II, Kap. 6) F in eine geschlossene Fläche Φ über, der Außenraum von F in den Innenraum von Φ; die Fläche F_1 geht ihrerseits in eine geschlossene Fläche Φ_1 über, die, da F_1 außerhalb F lag, ganz innerhalb Φ liegt, und der Innenraum von F_1 geht in den Innenraum von Φ_1 über. Der Raum T' geht somit durch die Transformation in den endlichen Raum T über, der zwischen den Flächen Φ und Φ_1 liegt. Für den Raum T gilt das Dirichletsche Prinzip. Genügt in diesem Raume $W = f(r, \vartheta, \varphi)$ (r, ϑ, φ sind Polarkoordinaten eines Punktes von T für O als Pol) der Laplaceschen Gleichung und den Stetigkeitsbedingungen, so genügt die Funktion

$$V = \frac{1}{\varrho} f\left(\frac{R^2}{\varrho}, \vartheta, \varphi\right)$$

der Laplaceschen Gleichung in dem reziproken Raume T', wo $\varrho, \vartheta, \varphi$ die Polarkoordinaten eines Punktes von T' sind, ebenfalls auf O als Pol bezogen. Damit ferner V an den Flächen F, F_1 gegebene Werte $g(\varrho, \vartheta, \varphi)$, $g_1(\varrho, \vartheta, \varphi)$ annimmt, muß W so bestimmt werden, daß es an den Flächen Φ, Φ_1 die Werte

$$\frac{R^2}{r} g\left(\frac{R^2}{r}, \vartheta, \varphi\right), \quad \frac{R^2}{r} g_1\left(\frac{R^2}{r}, \vartheta, \varphi\right)$$

annimmt. Existiert in T stets eine und nur eine Funktion W, die allen Bedingungen des Dirichletschen Prinzips genügt, so existiert auch für T' stets eine und nur eine Funktion V, die denselben Bedingungen genügt.

c) Folgerungen aus dem Dirichletschen Prinzip.

α) Satz: Es lassen sich stets die Oberflächen beliebig vieler begrenzter Räume so mit Masse belegen, daß das Potential dieser Massen an jeder Stelle einer jeden Oberfläche einen vorgeschriebenen Wert hat; und es ist nur immer eine solche Belegung möglich.

Beweis. F und F_1 seien zwei geschlossene Flächen, deren jede ganz außerhalb der anderen liegt, T sei der Innenraum von F, T_1 der Innenraum von F_1, T' der Raum, der sich außerhalb F und F_1 ins Unendliche erstreckt. g und g_1 seien die Werte, welche das Gesamtpotential der auf F und F_1 verteilten Massen an diesen Flächen annehmen soll. Nach dem Dirichletschen Prinzip ist es stets und nur auf eine Weise möglich: 1. eine Potentialfunktion V des Raumes T zu bestimmen, die an $F = g$ wird; 2. ebenso eine Potentialfunktion V_1 des Raumes T_1, die an $F_1 = g_1$ wird; 3. eine Potentialfunktion V' des Raumes T', die an $F_1 = g_1$ und an $F = g$ wird. Sind nun N, N_1 die äußeren Normalen der Flächen F, F_1, ν, ν_1 ihre inneren Normalen, so bestimme man k und k_1 aus den Gleichungen

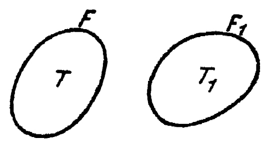

Fig. 15.

$$(11)\quad \lim\left(\frac{\partial V'}{\partial N} + \frac{\partial V}{\partial \nu}\right) = -4\pi k, \quad \lim\left(\frac{\partial V'}{\partial N_1} + \frac{\partial V_1}{\partial \nu_1}\right) = -4\pi k_1,$$

wo lim den Wert bezeichnet, den die Differentialquotienten an den Flächen F, resp. F_1 annehmen. Belegt man die Fläche F mit Masse von der Dichtigkeit k, F_1 mit Masse von der Dichtigkeit k_1 und nennt W, W_1 die Potentiale dieser Massen, so stimmt $W + W_1$ im ganzen Raume mit derjenigen Funktion U überein, die in T den Wert V, in T_1 den Wert V_1, in T' den Wert V' hat. Denn da an F

$$\lim\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial N}\right) + \left(\frac{\partial W}{\partial \nu}\right)\right\} = -4\pi k, \quad \lim\left\{\left(\frac{\partial W_1}{\partial N}\right) + \left(\frac{\partial W_1}{\partial \nu}\right)\right\} = 0,$$

so ist dort auch

$$(12)\qquad \lim\left\{\left(\frac{\partial(W+W_1)}{\partial N}\right)+\left(\frac{\partial(W+W_1)}{\partial \nu}\right)\right\}$$
$$=\lim\left(\frac{\partial V'}{\partial N}+\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)=\lim\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial \nu}\right)\right\},$$

und Analoges gilt für die Fläche F_1. Da außerdem U sowohl, als $W+W_1$ die charakteristischen Eigenschaften des Potentials besitzen, so sind sie nach Abschnitt I, Kap. 9, Nr. c) von Teil I identisch. — Mit k und k_1 sind auch die gesamten auf F und F_1 auszubreitenden Massen bestimmt.

Der Beweis läßt sich sofort auf den Fall übertragen, daß die Fläche F_1 nicht außerhalb, sondern ganz innerhalb F liegt. Man braucht dann nur mit T den Raum zwischen F und F_1, mit T' den Raum außerhalb F, mit T_1, wie vorher, den Raum innerhalb F_1 zu bezeichnen. Zugleich nimmt dann V an zwei Flächen gegebene Werte an, V' nur an einer.

Die Ausdehnung auf Räume, die von mehr als zwei Flächen begrenzt werden, liegt auf der Hand.

β) Satz von der äquivalenten Massentransposition.

1. **Ist in einem endlichen Raume T eine beliebige Masse M verteilt, so kann man die Wirkung dieser Masse auf Punkte außerhalb T dadurch ersetzen, daß man dieselbe Masse M auf der Oberfläche F von T auf gewisse Weise verteilt; und es ist nur eine derartige Verteilung möglich.**

Es sei V_a das Potential der gegebenen, in T, also innerhalb F liegenden Masse M für Punkte außerhalb F, es sei ferner W_a das Potential irgendeiner auf F selbst ausgebreiteten Masse, ebenfalls für Punkte außerhalb F. Soll die letztere Masse auf alle äußeren Punkte dieselbe Wirkung ausüben wie die gegebene Masse, so müssen die Ableitungen von V_a und W_a überall die gleichen sein, oder es muß $V_a=W_a+C$ für alle äußeren Punkte sein, falls C eine Konstante bezeichnet. Im Unendlichen verschwinden V_a und W_a, während die vorstehende Gleichung

auch dort gilt; mithin muß $C=0$, $V_a=W_a$ sein. Um W_a dieser Bedingung gemäß zu bestimmen, braucht W_a nur an F mit V_a übereinzustimmen; denn nach dem Dirichletschen Prinzip gibt es für den Raum T' außerhalb F nur eine Potentialfunktion, die an F gegebene Werte annimmt. Bestimmt man sodann auch für den Innenraum T von F eine Potentialfunktion W_i, die an F dieselben Werte wie V_a annimmt, belegt dann F mit Masse von der Dichtigkeit

$$(13) \qquad k=-\frac{1}{4\pi}\lim\left(\frac{\partial W_a}{\partial N}+\frac{\partial W_i}{\partial \nu}\right)$$

(N äußere, ν innere Normale von F), so sind W_a und W_i die Potentiale dieser Massenbelegung für äußere, resp. innere Punkte, da das Flächenpotential durch (13) und die charakteristischen Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.

Weiter folgt aus $V_a=W_a$, daß auch $\lim r\,V_a=\lim r\,W_a$ für $r=\infty$ sein muß. $\lim(r\,V_a)$ ist aber gleich der gegebenen Masse M, $\lim(r\,W_a)$ gleich der Masse M', die auf F ausgebreitet ist; mithin ist $M'=M$.

2. Die Wirkung von Massen, die ganz außerhalb einer geschlossenen Fläche F liegen, auf Punkte im Innern von F läßt sich durch die Wirkung einer **beliebigen** auf F verteilten Masse ersetzen und zwar allemal nur auf eine Art.

Beweis. Die gegebenen, außerhalb F liegenden Massen M mögen für innere Punkte von F das Potential V_i, für Punkte von F selbst das Potential $\overline{V}$ besitzen. Soll eine auf F verteilte Masse M', deren Potential für innere Punkte W_i sei, auf alle inneren Punkte die gleiche Wirkung ausüben wie M, so muß $W_i=V_i+C$ sein. C braucht hier nicht zu verschwinden, kann vielmehr einen beliebigen Wert haben, und zwar für alle inneren Punkte den gleichen. Eine solche Funktion W_i erhält man, wenn man für den Raum T innerhalb F eine Funktion W_i' sucht, die der Laplaceschen Gleichung genügt, die charakteristischen Eigenschaften des Potentials besitzt und an F den Wert $\overline{V}$ annimmt, dann eine zweite Funktion W_i'', die denselben Bedingungen genügt und an F überall den Wert 1 an-

nimmt. Dann hat $W_i = W_i' + C\,W_i''$ die geforderten Eigenschaften; und da W_i' und W_i'' durch obige Forderungen eindeutig bestimmt sind, so ist es auch W_i für ein gegebenes C. Bestimmt man weiter für den Raum I' außerhalb F ebenfalls zwei Potentialfunktionen W_a' und W_a'', deren erstere an $F = \overline{V}$, deren zweite an $F = 1$ wird, und setzt $W_a' + C\,W_a'' = W_a$, so wird an F $W_i = W_a$. Belegt man nun F mit Masse von der Dichtigkeit

$$
(13a)\quad \varkappa = -\frac{1}{4\pi}\lim\left(\frac{\partial W_a}{\partial N} + \frac{\partial W_i}{\partial \nu}\right)
$$
$$
= -\frac{1}{4\pi}\left\{\lim\left(\frac{\partial W_a'}{\partial N} + \frac{\partial W_i'}{\partial \nu}\right) + C.\lim\left(\frac{\partial W_a''}{\partial N} + \frac{\partial W_i''}{\partial \nu}\right)\right\},
$$

so sind W_a und W_i die Potentiale dieser Massenbelegung für äußere, resp. innere Punkte. Ferner ist nach Satz 4 des Kapitels 1 (S. 219) W_i'' für alle inneren Punkte von $F = 1$, daher $\lim \frac{\partial W_i''}{\partial \nu} = 0$. Dagegen ist $\lim \frac{\partial W_a''}{\partial N}$ nicht $= 0$, da nach Satz 5 des ersten Kapitels (S. 220) W_a'' für äußere Punkte einen zwischen 1 und 0 liegenden Wert hat. Daher hängt der Wert von $\varkappa$ von C ab. Für jeden Wert von C ergibt sich ein bestimmtes $\varkappa$, mit C ändert $\varkappa$ seinen Wert, damit ändert auch die Masse M', die auf F verteilt werden muß, ihren Wert. Je nach der Wahl von C kann M' beliebige Werte annehmen.

3. **Beispiele für die äquivalente Massentransposition** haben wir bei beliebigen Massen, die von Kugeln begrenzt werden, durchgeführt (s. S. 110—112). Analoge Beispiele für Massen, die von Rotationsellipsoiden begrenzt sind, würden sich mittels der im Abschnitt III aufgestellten Formeln durchführen lassen. Ein weiteres Beispiel findet sich in Teil I, S. 221—224. Im allgemeinen ist die wirkliche Ermittelung der Dichtigkeit der auf F zu verteilenden Masse nicht möglich; denn das Dirichletsche Prinzip lehrt nur die Existenz der oben mit W bezeichneten Funktionen, gibt aber kein Mittel, diese Funktionen wirklich zu bilden. In einem Falle kann man jene Dichtigkeit vollständig bestimmen, nämlich dann, wenn innerhalb einer geschlossenen Fläche F räumliche Massen

derart verteilt sind, daß ihr Potential V an F einen konstanten Wert hat, d. h. falls F eine Niveaufläche jener Massen ist.

Es bezeichne wieder T den Innenraum, T' den Außenraum von F. Das Potential der in T enthaltenen räumlichen Massen M sei für äußere Punkte V, sein konstanter Wert an F selbst $\overline{V}=C$. Auf den Raum T' wenden wir die Folgerung des Greenschen Satzes an, die durch Gleichung (5), S. 98 des ersten Teils ausgedruckt wird [die Anwendung des Greenschen Satzes auf den ins Unendliche sich erstreckenden Raum T' ist S. 228 ff. gerechtfertigt], indem wir $U=V$, $W=\frac{1}{\varrho}$ setzen, wo ϱ den Abstand eines Punktes P' von T' von dem in T liegenden Punkte O bezeichnet. Diese Funktionen haben die für die Gültigkeit des Greenschen Satzes erforderlichen Eigenschaften, zugleich ist in T' $\Delta U=0$, $\Delta W=0$. Beachten wir noch, daß im Greenschen Satze N die äußere Normale des Integrationsraums bezeichnet, also die innere Normale von F, und bezeichnen letztere mit ν, so ergibt die zitierte Gleichung

$$(14) \qquad \iint\limits_F \left[V \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \nu} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial \nu} \right] d\,o = 0 .$$

Nun hat an F V den konstanten Wert C, Gleichung (14) kann also so geschrieben werden

$$(14\text{a}) \qquad C \iint\limits_F \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \nu}\, d\,o = \iint\limits_F \frac{1}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial \nu}\, d\,o .$$

Ferner ist, wie bei Satz 2 des ersten Kapitels,

$$\iint\limits_F \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \nu}\, d\,o = -\iint\limits_F \frac{\cos(\varrho, \nu)}{\varrho^2}\, d\,o = 4\pi .$$

(Die Ersetzung der in jenem Satze auftretenden äußeren

Normale von F durch die innere bringt die Änderung des Vorzeichens mit sich.) Aus (14a) folgt daher

$$\iint\limits_F \left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)\frac{do}{\varrho} = C. \tag{15}$$

Das linksstehende Integral ist nichts anderes als der Wert des Potentials W, den die mit Masse von der Dichtigkeit

$$\varkappa = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial \nu} \tag{16}$$

belegte Fläche F im Punkte O hat; und da man dieselbe Gleichung (15) erhält, wenn man ϱ von irgendeinem anderen Punkte O des Raumes T rechnet, so hat W für beliebige Punkte O von T denselben konstanten Wert, mithin auch für die Oberfläche. Also hat das Potential W der mit Masse von der Dichtigkeit $\varkappa$ belegten Fläche F in allen Punkten von F denselben konstanten Wert wie das Potential V der gegebenen Masse. Die gesamte auf F ausgebreitete Masse ist

$$M' = \iint\limits_F \varkappa\, do = \frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial V}{\partial \nu}\, do.$$

Andererseits ist nach dem Satze 2 des ersten Kapitels (S. 216), da die Massen M, deren Potential V ist, ganz innerhalb F liegen,

$$\iint \frac{\partial V}{\partial \nu}\, do = 4\pi M,$$

mithin

$$M' = M. \tag{17}$$

Ferner gilt für jeden Punkt P' des Raumes T' die Gleichung (3a) S. 230:

$$V_{P'} = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_F \left[V\frac{\partial \frac{1}{\varrho'}}{\partial \nu} - \frac{1}{\varrho'}\frac{\partial V}{\partial \nu}\right] do, \tag{18}$$

worin $V_{P'}$ den Wert bezeichnet, da das Potential V der

räumlichen Massen M in P' hat, ϱ' den Abstand des Punktes P' von do. An der Fläche F ist aber $V=C$, daher

$$\iint\limits_F V \frac{\partial \frac{1}{\varrho'}}{\partial \nu} do = C \iint\limits_F \frac{\partial \frac{1}{\varrho'}}{\partial \nu} do = 0$$

(vgl. die Entwicklung S. 216—217). Mithin wird

$$V_{P'} = \iint\limits_F \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial \nu}\right) \frac{do}{\varrho'} = \iint \frac{\varkappa\, do}{\varrho'} = W_{P'}, \tag{18a}$$

d. h. gleich dem Werte, den das Potential W der auf F mit der Dichtigkeit $\varkappa$ ausgebreiteten Masse $M' = M$ in P' hat. Die beiden Potentiale V und W haben also in allen Punkten P' von T' gleiche Werte, und zugleich sind die zu beiden Potentialen gehörigen Massen gleich.

γ) Anwendung auf das elektrische Gleichgewicht eines Systems von Leitern.

1. Einer Anzahl von isoliert aufgestellten Leitern seien gegebene Mengen freier Elektrizität mitgeteilt. Es soll untersucht werden, ob unter ihrer gegenseitigen Einwirkung und unter dem Einfluß gegebener äußerer elektrischer Kräfte stets elektrisches Gleichgewicht möglich ist.

Der Einfachheit halber nehmen wir zwei Leiter als gegeben an; die Innenräume beider bezeichnen wir mit T und T_1, ihre Oberflächen mit F und F_1, während der Raum, der sich außerhalb F und F_1 ins Unendliche erstreckt, T' sei (s. Fig. 15, S. 243). Das Gesamtpotential der auf den Oberflächen beider Leiter verteilten elektrischen Massen sei V, seine Werte an F und F_1 seien resp. $\overline{V}$ und $\overline{V}_1$. Ferner sei U das Potential der gegebenen äußeren Kräfte, die in (in T' gelegenen) Nichtleitern ihren Sitz haben, $\overline{U}$ und $\overline{U}_1$ seien die Werte von U an F und F_1.

Zum elektrischen Gleichgewicht ist erforderlich, daß

an der Fläche F

$$\overline{U}+\overline{V}=c, \tag{19}$$

an der Fläche F_1

$$\overline{U_1}+\overline{V_1}=c_1 \tag{19a}$$

ist, wo c, c_1 gewisse, vorläufig noch unbekannte Konstante bezeichnen. Sind nämlich die Bedingungen (19) und (19a) erfüllt, so hat das Gesamtpotential $U+V$ aller wirkenden Kräfte nach Satz 4 des ersten Kapitels (s. S. 219) in allen Punkten von T den Wert c, in allen Punkten von T_1 den Wert c_1. Um die Funktion V zu ermitteln, die den vorstehenden Bedingungen (19) und (19a) genügt, verfahren wir folgendermaßen. Wir bestimmen 1) zwei solche Belegungen der Flächen F, F_1, daß das Gesamtpotential W beider Belegungen an F den Wert $-\overline{U}$, an F_1 den Wert $-\overline{U_1}$ hat, was nach dem Satze a (S. 243) stets und nur auf eine Art möglich ist; m und m_1 seien die dazu auf F, resp. F_1 zu verteilenden elektrischen Massen. 2) Ebenso bestimmen wir zwei andere Belegungen der Flächen F, F_1 derart, daß deren Gesamtpotential W' an F den Wert 1, an F_1 den Wert 0 hat; die hierzu auf F und F_1 zu verteilenden elektrischen Massen seien m', m_1'. 3) Bestimmen wir zwei weitere Belegungen jener Flächen so, daß ihr Gesamtpotential W'' an F den Wert 0, an F_1 den Wert 1 hat; die Massen dieser Belegungen seien m'' und m_1''. Dann genügt die Funktion

$$V=W+cW'+c_1W'' \tag{20}$$

den Bedingungen (19) und (19a) und besitzt alle Eigenschaften von Flächenpotentialen. Da ferner die Massen bekannt sind, die auf F und F_1 zu verteilen sind, um die Teilpotentiale W, W', W'' hervorzubringen, so ist auch die für V erforderliche Masse bekannt; sie ist $m+cm'+c_1m''$ für F, $m_1+cm_1'+c_1m_1''$ für F_1. Sind nun M und M_1 die Massen freier Elektrizität, die den beiden Leitern mitgeteilt sind, so ist

$$\begin{cases} M\ =m+cm'+c_1m'', \\ M_1=m_1+cm_1'+c_1m_1''; \end{cases} \tag{21}$$

denn durch Influenz entsteht gleichviel positive und negative Elektrizität, die gesamte auf der Oberfläche jedes Leiters vorhandene elektrische Masse ist daher gleich der Masse der ihm mitgeteilten freien Elektrizität. Durch (21) sind auch die Konstanten c und c_1 bestimmt, da nach Satz a sowohl W, W_1' W_1'', als m, m', m'' und m_1, m_1', m_1'' eindeutig bestimmt, M und M_1 aber gegeben sind. Man sieht daher, daß stets elektrisches Gleichgewicht vorhanden ist, daß es aber nur einen derartigen Gleichgewichtszustand gibt.

Die Dichtigkeit der auf F und F_1 zu verteilenden Massen ergibt sich aus V mittels der bekannten, schon wiederholt angewandten Formel.

2. Es soll gezeigt werden, daß die elektrische Verteilung auf einem schalenförmigen Leiter die gleiche ist, wie auf einem vollen, falls die wirkenden äußeren Kräfte ihren Sitz im Außenraum haben.

Ein schalenförmiger Leiter sei außen begrenzt von der Fläche F, innen von F_1, wobei F_1 ganz innerhalb F liegt. Unter der Wirkung äußerer gegebener Kräfte, deren Potential U sei, könnte sich freie Elektrizität auf beiden Grenzflächen ausbreiten. Es sei V das Potential der auf F, V_1 das der auf F_1 ausgebreiteten Elektrizität. Dann ist zum elektrischen Gleichgewicht erforderlich, daß im Innern der Schale, also für alle Punkte zwischen F und F_1, $U+V+V_1$ konstant ist. Ist aber $U+V+V_1$ an F_1 konstant, so hat es im ganzen Innenraum von F_1 denselben konstanten Wert. Da $U+V+V_1$ sowohl innerhalb F_1, als zwischen F und F_1 konstant ist, muß, wenn N_1 die äußere, ν_1 die innere Normale von F_1 bezeichnet,

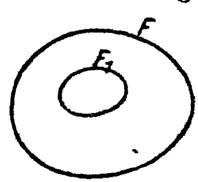

Fig. 16.

$$\frac{\partial (U+V+V_1)}{\partial N_1} = 0, \quad \frac{\partial (U+V+V_1)}{\partial \nu_1} = 0 \tag{22}$$

sein, also auch

$$\frac{\partial (U+V+V_1)}{\partial N_1} + \frac{\partial (U+V+V_1)}{\partial \nu_1} = 0. \tag{22a}$$

Da die zu U und V gehörigen Massen außerhalb F_1 liegen, ist $U+V$ an F_1 kontinuierlich, d. h.

$$\frac{\partial(U+V)}{\partial N_1}+\frac{\partial(U+V)}{\partial \nu_1}=0. \tag{23}$$

Mithin ist für alle Punkte von F_1

$$\frac{\partial V_1}{\partial N_1}+\frac{\partial V_1}{\partial \nu_1}=0. \tag{23a}$$

Nun ist aber

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V_1}{\partial N_1}+\frac{\partial V_1}{\partial \nu_1}\right)=\varkappa_1,$$

d. i. gleich der Dichtigkeit der Masse, mit der F_1 zu belegen ist, um das Potential V_1 zu ergeben. Nach (23a) ist $\varkappa_1$ überall an $F_1=0$; d. h. auf F_1 ist gar keine freie Elektrizität vorhanden. Daraus folgt, daß V_1 überall verschwindet. Auf einem schalenförmigen Leiter verteilt sich die Elektrizität ebenso, als wäre er massiv.

3. Anders verhält sich die Sache, wenn die elektrischen Kräfte, deren Potential U ist, im Hohlraum der Schale, also im Innern von F_1 ihren Sitz haben. Zwar ist auch hier $U+V+V_1$ für alle Punkte der Schale konstant; aber die weiteren Schlüsse werden hinfällig. Hier fuhrt folgende Überlegung zum Ziel. Man kann die Wirkung der Massen μ, deren Potential U ist, auf Punkte außerhalb F_1 dadurch ersetzen, daß man dieselbe Masse μ auf gewisse Weise auf F_1 ausbreitet (Satz β, S. 244). Ist W_1 das Potential der so auf F_1 ausgebreiteten Masse μ, so kann man für alle Punkte außerhalb F_1, auch für die Punkte von F_1 selbst, U durch W_1 ersetzen. Es muß also in der ganzen Schale $V+V_1+W_1$ konstant sein $=c$; mithin muß, da die Massen, von denen $V+V_1+W_1$ herrührt, ganz außerhalb F_1 oder auf F_1 ihren Sitz haben, $V+V_1+W_1$ auch im ganzen Innenraum von F_1 den Wert c haben. Infolgedessen gelten die obigen Gleichungen (22) und (22a) noch, falls man in denselben U durch W_1 ersetzt, d. h. es ist

$$\frac{\partial(V+V_1+W_1)}{\partial N_1}+\frac{\partial(V+V_1+W_1)}{\partial \nu_1}=0. \tag{22b}$$

Ferner ist, da V das Potential von Massen außerhalb F_1 ist,

(23b) $$\frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial \nu_1} = 0,$$

mithin

(24) $$\frac{\partial (W_1 + V_1)}{\partial N_1} + \frac{\partial (W_1 + V_1)}{\partial \nu_1} = 0.$$

Die Dichtigkeit der Massenverteilung auf F_1, die erforderlich ist, um das Potential $V_1 + W_1$ hervorzubringen, ist somit überall auf F_1 gleich Null. Infolgedessen ist auch $V_1 + W_1$ überall gleich Null. Für Punkte außerhalb F_1 war $W_1 = U$, für solche Punkte ist daher auch $U + V_1 = 0$. Ferner gehörte zum Potential W_1 die Masse μ, zu $V_1 + W_1$ die Masse 0, daher zu V_1 die Masse $-\mu$.

Weiter reduziert sich, da $U + V_1 = 0$ ist, die Bedingung des elektrischen Gleichgewichts auf $V = c$, und es genügt, wenn V diesen Wert c an F hat. Die Masse der auf der äußeren Fläche F verteilten Elektrizität sei M', die der der Schale mitgeteilten freien Elektrizität M, so ist M gleich der Summe der auf F und F_1 verteilten elektrischen Massen, d. h. $M' - \mu = M$, $M' = \mu + M$. Wir sehen also, daß die Wirkung der Kräfte, die im Hohlraum der Schale ihren Sitz haben, und deren Masse $= \mu$ ist, die ist, daß auf F_1 die Masse $-\mu$ sich derartig verteilt, daß die Wirkung dieser Verteilung außerhalb F_1 die Wirkung der gegebenen Masse μ vollständig aufhebt. Auf der äußeren Grenzfläche F der Schale verteilt sich die um μ vermehrte Masse der mitgeteilten freien Elektrizität so, daß ihr Potential an F konstant ist.

Zusatz. Alle Anwendungen des Dirichletschen Prinzips hätten sich auch ohne Benutzung dieses Prinzips aus der Darstellung des Potentials mittels der ersten Greenschen Funktion ableiten lassen.

d) Einwände gegen das Dirichletsche Prinzip.

Das Prinzip ist für gewisse Flächen und unter beschränkenden Annahmen über die an der Oberfläche gegebenen Werte der Potentialfunktion, die Randwerte, unzweifelhaft richtig. Gegen seine Allgemeingültigkeit sind indessen Bedenken erhoben. Es ist bezweifelt, ob die bei der Ableitung des Prinzips gemachten Annahmen

für alle möglichen Begrenzungen des betrachteten Raumes und für alle möglichen Randwerte zulässig sind. Was die Annahme betrifft, daß man eine an der Grenzfläche eines Raumes T gegebene Funktion derart in das Innere von T fortsetzen kann, daß sie den Stetigkeitsbedingungen genügt, so läßt sich zeigen, daß für geschlossene Flächen mit überall endlicher Krümmung (sogar auch wenn die Krümmung in einzelnen Punkten in gewisser Weise unendlich wird) und für Randwerte, die selbst Potentiale von Massen sind, solche Fortsetzungen sich analytisch bilden lassen*). Für unzulässig ist auch die Annahme erklärt, daß stets ein Minimum des Integrals (1), S. 238 existieren müsse. Demgegenüber hat Hilbert**) gezeigt, daß sich bei geeigneten einschränkenden Annahmen über die Grenzbedingungen und die Grenzfläche der Grundgedanke des Prinzips in engem Anschluß an dessen anschauliche Bedeutung so verfolgen läßt, daß daraus ein streng mathematischer Beweis für die Existenz der Minimalfunktion entsteht; und er hat das für das logarithmische Potential im einzelnen durchgeführt. Die Hilbertschen Entwicklungen zu reproduzieren würde zu weit führen; wir müssen uns daher mit diesem Hinweise begnügen.

Besteht danach das Prinzip auch unter gewissen Beschränkungen sowohl betreffs der Natur der Grenzfläche, als betreffs der Beschaffenheit der Randwerte zu Recht, so ist mit dem Nachweise der Existenz einer Funktion noch nicht die Frage erledigt, wie man jene Funktion wirklich bilden kann. Dies Ziel haben sich die neueren Untersuchungen über die Randwertaufgabe gestellt; sie gehen darauf aus, unter gewissen Voraussetzungen Potentialfunktionen eines Raumes T aus ihren Randwerten zu konstruieren. Das ist zuerst C. Neumann durch seine Methode des arithmetischen Mittels gelungen. Die Grundzüge dieser Methode sollen im folgenden dargelegt werden unter gewissen Beschränkungen hinsichtlich der Beschaffenheit des betrachteten Raumes T und der Randwerte.

---

*) E. Heine, Über einige Voraussetzungen beim Beweise des Dirichletschen Prinzipes. Mathematische Annalen IV, S. 626, 1871.

**) D. Hilbert, Über das Dirichletsche Prinzip, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung VIII, 1899, S. 184. — Mathematische Annalen LIX, S. 161, 1904.

Kapitel 4.

Die C. Neumannsche Methode des arithmetischen Mittels.

a) Bezeichnungen. Ableitung eines Hilfssatzes über das Potential von Doppelbelegungen.

Die Methode benutzt die Sätze über das Potential von Doppelbelegungen, die in Teil I, Abschnitt II, Kap. 4 entwickelt sind, außerdem einen Satz, der dort nicht allgemein bewiesen ist, und dessen Ableitung hier nachgeholt werden soll. Vorher sollen einige im folgenden zu benutzende abgekürzte Bezeichnungen eingeführt werden. Ist F eine geschlossene, doppelt belegte Fläche, μ das Moment der Doppelbelegung, U ihr Potential, so ist

$$U = \iint \mu \frac{\cos(\varrho, N)\, d o}{\varrho^2}.$$

Darin ist ϱ der Abstand des Aufpunktes P von dem Punkte Q der Fläche, an dem das Flächenelement $d o$ liegt, μ eine gegebene Funktion der Koordinaten von Q, die künftig mit $\mu(Q)$ bezeichnet werden soll, N die äußere Flächennormale. Unter der Richtung von ϱ verstehen wir, wie früher, die Richtung von P nach Q hin. Die Integration ist über die Fläche F zu erstrecken.

Nun ist

$$\frac{\cos(\varrho, N)\, d o}{\varrho^2} = \pm\, d\omega,$$

wo $d\omega$ das Flächenelement einer um P mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel bezeichnet (vgl. Teil I, S. 66). Wir setzen statt dieser Gleichung die folgende:

$$\frac{\cos(\varrho, N)\, d o}{\varrho^2} = d\omega, \tag{1}$$

so daß $d\omega$ nicht den absoluten Wert des Elements der Kugelfläche mit dem Radius 1 bezeichnet, sondern stets

das Vorzeichen von $\cos(\varrho, N)$ hat. Ferner sollen die beiden Fälle, daß P außerhalb oder innerhalb der geschlossenen Fläche F liegt, dadurch unterschieden werden, daß zu $d\omega$ der Index a oder i hinzugefügt wird; entsprechende Indizes sind dem U zu geben. Außerdem soll zu U, das ja eine Funktion der Koordinaten des Punktes P ist, als Argument P hinzugefügt werden. Dann ist

$$(2) \qquad U_a(P) = \iint \mu(Q)\, d\omega_a, \quad U_i(P) = \iint \mu(Q)\, d\omega_i.$$

Mit unserer Bezeichnung lauten die in Teil I, S. 70 aufgestellten Sätze:

$$(2\text{a}) \qquad \iint d\omega_a = 0, \quad \iint d\omega_i = 4\pi,$$

so daß für konstante Werte μ von $\mu(Q)$, wie schon in Teil I, S. 154 angemerkt ist,

$$(2\text{b}) \qquad U_a(P) = 0, \quad U_i(P) = 4\pi\mu$$

wird. Für beliebige μ haben $U_a(P)$ und $U_i(P)$ in allen Punkten P, die nicht unendlich nahe an F liegen, die charakteristischen Eigenschaften des Potentials einfach belegter Flächen für äußere Punkte (vgl. Teil I, S. 165).*)

---

*) Rückt der Aufpunkt ins Unendliche, so ist $\lim\limits_{r=\infty}(rU)$ nicht nur endlich, wie an der angeführten Stelle bemerkt ist, sondern es ist $\lim\limits_{r=\infty}(rU) = 0$. Das folgt aus der Entstehung von U. Nach Teil I, S. 153 ist

$$U = \lim_{\delta=0}(V + V'),$$

wo V und V' die Potentiale einfach belegter Flächen sind. Daher wird

$$\lim_{r=\infty}(rU) = \lim_{\delta=0}\,[\lim_{r=\infty}(rV) + \lim_{r=\infty}(rV')].$$

Sind nun M, M' die Massen, deren Potentiale V, V' sind, so ist

$$\lim_{r=\infty}(rV) = M, \quad \lim_{r=\infty}(rV') = M',$$

und weiter ist wegen Gleichung (2), S. 152 des ersten Teils

$$M = -M'.$$

Für den Fall, daß sich der Punkt P, sei es von außen, sei es von innen, der Fläche F beliebig nähert, sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\lim U_a(P) = \overline{U}_a(P), \quad \lim U_i(P) = \overline{U}_i(P). \tag{3}$$

Von den Werten $\overline{U}_a(P)$, $\overline{U}_i(P)$ ist zu unterscheiden der Wert, den U annimmt, wenn man dem Punkte P eine feste Lage auf F gibt, wenn also ϱ den Abstand eines festen Punktes P der Fläche F von einem veränderlichen Punkte Q dieser Fläche bezeichnet. In diesem Falle soll U mit $u(P)$ bezeichnet werden; zugleich soll zu $d\omega$ der Index F hinzugefügt werden. Für Punkte der Fläche F nimmt also U den Wert an:

$$u(P) = \iint \mu(Q)\, d\omega_F. \tag{4}$$

Daß $u(P)$ für alle Punkte P von F einen endlichen Wert hat, falls nur $\mu(Q)$ überall endlich ist, folgt so. Neben den Gleichungen (2a) ist in Teil I, S. 70 noch eine dritte abgeleitet, die in unserer Bezeichnung lautet:

$$\iint d\omega_F = 2\pi.\text{*)} \tag{4a}$$

Für konstante Werte μ von $\mu(Q)$ ist daher

$$u(P) = 2\pi\mu. \tag{4b}$$

Ist ferner $\mu(Q)$ nicht konstant, aber überall auf F endlich, und ist G der absolut größte Wert von $\mu(Q)$, so ist

$$|u(P)| < G \iint d\omega_F \quad \text{d. h.} \ |u(P)| < G \cdot 2\pi,$$

also endlich.

Zwischen $\overline{U}_a$ und $\overline{U}_i$ findet nach Teil I, S. 156 [Gl. (13)] für beliebige μ die Beziehung statt:

$$\overline{U}_a(P) - \overline{U}_i(P) = -4\pi\mu(P). \tag{5}$$

*) Diese Gleichung setzt, wie aus ihrer Ableitung hervorgeht, voraus, daß die Fläche F im Punkte P eine bestimmte Tangentialebene hat. Die Gleichung bedarf einer Modifikation, wenn das nicht der Fall ist, wenn also die Fläche F in P eine Kante oder Ecke hat. Auf diese Modifikation soll hier nicht eingegangen werden.

Für konstante μ folgt ferner aus (2b) und (4b)

$$\overline{U}_a(P) + \overline{U}_i(P) = 2u(P). \tag{6}$$

Diese Gleichung gilt nun, wie sogleich nachgewiesen werden soll, für beliebige endliche μ. Aus ihr und (5) folgt:

$$\begin{cases} \overline{U}_a(P) = u(P) - 2\pi\mu(P), \\ \overline{U}_i(P) = u(P) + 2\pi\mu(P). \end{cases} \tag{6a}$$

Zur Ableitung der Gleichungen (6a) [und damit von (6)] knüpfen wir an die in Teil I, S. 70 aufgestellte allgemeine Gleichung (II) an. Wir wenden sie auf den Innenraum T einer geschlossenen Fläche F an, indem wir zugleich $f = 1$ setzen, so wird

$$\iiint \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \frac{dv}{\varrho^2} = \iint \frac{\varphi \cos(\varrho, N)}{\varrho^2} do + K. \tag{II}$$

Darin ist die Integration links über T, die Integration rechts über F zu erstrecken; φ ist eine in T endliche, stetige und einwertige Funktion, die überall eine endliche Ableitung nach ϱ hat. K hat, je nachdem der Punkt P, von dem an ϱ gerechnet wird, außerhalb T, innerhalb T oder auf der Grenzfläche F von T liegt, resp. den Wert

$$0, \quad -4\pi(\varphi)_{\varrho=0}, \quad -2\pi(\varphi)_{\varrho=0}.$$

Wählt man die Funktion φ so, daß sie an F in $\mu(Q)$ übergeht (womit zugleich vorausgesetzt wird, daß $\mu(Q)$ an F stetig ist), d. h. setzt man die an F gegebene Funktion $\mu(Q)$ in das Innere von T beliebig fort, nur derart, daß die Fortsetzung φ in T die obengenannten Eigenschaften besitzt, so wird das Flächenintegral das Potential einer Doppelbelegung, und die Gleichung (II) gibt, wenn wir die einzelnen Fälle betreffs der Lage von P sondern:

$$\begin{cases} U_a(P) = \underset{T}{\iiint} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \frac{dv}{\varrho^2}, \quad U_i(P) = \underset{T}{\iiint} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \frac{dv}{\varrho^2} + 4\pi(\varphi)_{\varrho=0} \\ u(P) = \underset{T}{\iiint} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \frac{dv}{\varrho^2} + 2\pi(\varphi)_{\varrho=0}. \end{cases} \tag{7}$$

In der dritten Gleichung (7) ist $(\varphi)_{\varrho=0} = \mu(P)$, und läßt man in den beiden ersten Gleichungen (7) U_a in $\overline{U}_a$, U_i in $\overline{U}_i$ übergehen, so wird in der zweiten Gleichung ebenfalls $(\varphi)_{\varrho=0} = \mu(P)$. Daher folgen aus den Gleichungen (7) sofort die Gleichungen (6a), falls man noch zeigen kann, daß, mag P von außen oder innen sich F nähern oder von vornherein auf F liegen, die Integrale in allen drei Gleichungen (7) denselben Wert haben.

Der fehlende Nachweis betreffs der Raumintegrale läßt sich folgendermaßen fuhren. Um einen Punkt M der Flache F beschreibe man eine Kugel mit dem kleinen Radius δ und bezeichne den Teil des Raumes T, der innerhalb der Kugel liegt, mit T_1, den außerhalb der Kugel liegenden Teil von T mit T_2. Das über den Raum T erstreckte Integral zerfällt dann in zwei andere:

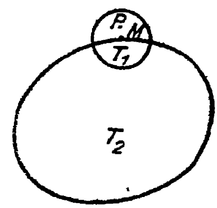

Fig. 17.

$$(7\text{a}) \qquad \iiint\limits_{T} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \frac{dv}{\varrho^2} = \iiint\limits_{T_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \frac{dv}{\varrho^2} + \iiint\limits_{T_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \frac{dv}{\varrho^2}.$$

Ist nun P ein innerhalb der Kugel liegender, dem Kugelmittelpunkte M unendlich naher Punkt, so hat das über T_2 erstreckte Integral, das sich für Punkte außerhalb T_2 kontinuierlich ändert, in P und M nur unendlich wenig verschiedene Werte, und für den Fall, daß P in M fällt, hat es nur einen bestimmten Wert. Ferner sei G der absolut größte Wert, den $\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$ in T_1 annimmt, so ist

$$(7\text{b}) \qquad \left| \iiint\limits_{T_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \frac{dv}{\varrho^2} \right| < G \iiint\limits_{T_1} \frac{dv}{\varrho^2}.$$

Weiter ist das über eine volle Kugel erstreckte Integral $\iiint \frac{dv}{\varrho^2}$ nach Teil I, S. 57 kleiner als 4π mal dem Kugelradius. T_1 ist nur ein Teil des Kugelinnern, das über T_1

erstreckte Integral der rechten Seite von (7b) ist daher noch kleiner, oder es ist

$$\text{(7c)} \qquad \left| \iiint\limits_{T_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \frac{dv}{\varrho^2} \right| < G \cdot 4\pi\delta.$$

Ist δ beliebig klein, während P immer innerhalb der Kugel bleibt, so daß PM ein Bruchteil von δ ist, so wird für $PM = 0$ auch $\delta = 0$, daher das Integral der linken Seite von $(7c) = 0$.

Damit ist gezeigt, daß falls U_a in $\overline{U}_a$, U_i in $\overline{U}_i$ übergeht, d. h. falls P sich von außen oder innen dem festen Punkte P der Fläche nähert, endlich auch in $u(P)$ die Raumintegrale in (7) denselben Wert haben.

Zusatz 1. Aus den Formeln (7) folgt, daß, wenn $\mu(P)$ sich auf der Fläche F kontinuierlich ändert, dasselbe auch für $\overline{U}_a(P)$, $\overline{U}_i(P)$ und $u(P)$ gilt.

Sind nämlich P und P' zwei sehr nahe Punkte der Fläche F, beide innerhalb der vorher beschriebenen Kugel, und zerlegt man das Raumintegral wie vorher, so wird

$$u(P) = \iiint\limits_{T_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \frac{dv}{\varrho^2} + \iiint\limits_{T_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \frac{dv}{\varrho^2} + 2\pi\mu(P)$$
$$= u_1 + u_2 + u_3,$$

analog

$$u(P') = u_1' + u_2' + u_3'.$$

Nun sind, wie vorher gezeigt, die absoluten Werte von u_1 und u_1' beliebig klein, wenn nur δ klein genug ist; damit ist $u_1 - u_1'$ beliebig klein. $u_2 - u_2'$ und $u_3 - u_3'$ sind aber beliebig klein, da u_2 und u_3 sich kontinuierlich ändern, mithin wird, wenn nur P und P' nahe genug und zugleich δ klein genug gewählt wird, $u(P) - u(P')$ beliebig klein.

Genau ebenso ist der Beweis für $\overline{U}_a(P)$ und $\overline{U}_i(P)$.

Zusatz 2. Die vorstehenden Resultate, die für geschlossene Flächen F abgeleitet sind, gelten auch für ungeschlossene Flächen.

Ist σ eine ungeschlossene Fläche, so ergänze man sie auf irgendeine Weise durch Hinzufügung einer zweiten

Fläche σ' zu einer geschlossenen Fläche F, ferner wähle man die Doppelbelegung von σ' so, daß ihr Moment überall kontinuierlich ist, sich auch an der Grenze von σ und σ' kontinuierlich an das gegebene Moment μ von σ anschließt. Wie die Fläche F, zerfällt auch das Potential ihrer Doppelbelegung in zwei Teile $U = U_\sigma + U_{\sigma'}$. Für $U = U_\sigma + U_{\sigma'}$ gelten die Gleichungen (6a). Irgendein Punkt P von σ ist für $U_{\sigma'}$ ein äußerer Punkt. $U_{\sigma'}$ ändert sich daher kontinuierlich beim Durchgang des Aufpunktes durch die Fläche σ. Die durch die Gleichungen (6a) angegebene Änderung von $U_\sigma + U_{\sigma'}$ kann somit nur dadurch zustande kommen, daß jene Gleichungen für U_σ allein gelten.

Bemerkung. Auch die Gleichungen (6) und (6a) bedürfen einer Modifikation für solche Flächenpunkte P, in denen die Fläche F irgendwelche Singularitäten besitzt.

Die Resultate, die unter der Annahme einer stetigen Funktion $\mu(Q)$ abgeleitet sind, lassen sich unschwer auf den Fall ausdehnen, daß $\mu(Q)$ auf der Fläche abteilungsweise stetig ist.

b) Die bei der Methode des arithmetischen Mittels auftretenden Potentiale von Doppelbelegungen.

Es soll die Methode des arithmetischen Mittels unter den folgenden speziellen Voraussetzungen entwickelt werden:

1. Die geschlossene Fläche F sei überall stetig gekrümmt und überall nach außen konvex, so daß, wenn man in irgendeinem Punkte P von F eine Tangentialebene konstruiert, die Fläche mit der Tangentialebene nur den Berührungspunkt gemein hat und ganz auf einer Seite der Tangentialebene liegt.

Ist diese Voraussetzung erfüllt, so ist $d\omega_F$ für alle Punkte Q der Fläche und für jede Lage des Punktes P auf F positiv; denn der Winkel (ϱ, N) kann dann nur Werte zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ annehmen.

2. Ist $f(P)$ der Wert, den die (für den Innen- oder den Außenraum T von F) zu bestimmende Potentialfunktion

für Punkte P der Fläche selbst annimmt, so soll $f(P)$ eine überall endliche und stetige Funktion des Ortes auf der Fläche sein.

Auf Erweiterungen der Methode a) dahin, daß die Funktion $f(P)$ die Bedingung 2. nur abteilungsweise erfullt, b) daß die Fläche F aus verschiedenen Flächenstücken zusammengesetzt ist, oder daß F Kanten oder Spitzen hat, c) auf den Fall, daß T außer von F noch von mehreren innerhalb F liegenden geschlossenen Flächen begrenzt ist, oder auch, daß T den außerhalb mehrerer Flächen $F, F_1, ..$ liegenden Raum bezeichnet, soll hier nicht eingegangen werden.

Die Methode besteht im folgenden. Aus der an der Fläche F gegebenen Funktion $f(P)$ bilde man eine Reihe anderer Funktionen, zuerst die Funktion

$$f'(P) = \frac{1}{2\pi}\iint f(Q)\, d\,\omega_F, \tag{8}$$

daraus die weiteren

$$\left\{\begin{aligned} &f''(P) = \frac{1}{2\pi}\iint f'(Q)\, d\,\omega_F,\ f'''(P) = \frac{1}{2\pi}\iint f''(Q)\, d\,\omega_F, \ldots, \\ &f^{(n)}(P) = \frac{1}{2\pi}\iint f^{(n-1)}(Q)\, d\,\omega_F, \end{aligned}\right. \tag{8a}$$

wobei jedesmal über die Flache F zu integrieren ist oder auch über die Halbkugel, auf der die Projektionen $d\,\omega_F$ der Flächenelemente $d\,o$ von F liegen. Die Integrale (8) und (8a) sind Potentiale von Doppelbelegungen für den speziellen Fall, daß der Aufpunkt auf der Fläche selbst liegt. $f'(P)$ ist nichts anderes als die vorher mit $u(P)$ bezeichnete Funktion für den Fall, daß das Moment der Doppelbelegung $\frac{1}{2\pi} f(Q)$ ist. Analoge Bedeutung haben $f'', f''', \ldots\ldots$ Aus dem S. 260, Zusatz 1 Erörterten folgt, daß, wenn $f(P)$ eine stetige Funktion des Ortes auf der Fläche ist, dasselbe auch für $f', f'', .., f^{(n)}$ gilt.

Weiter bilde man für dieselben Doppelbelegungen, die in (8) und (8a) auftreten, die Potentiale für äußere und innere Punkte:

$$(9)\quad\begin{cases} U_a(P)=\frac{1}{2\pi}\iint f(Q)\,d\omega_a,\ U_a'(P)=\frac{1}{2\pi}\iint f'(Q)\,d\omega_a,\ldots, \\ U_a^{(n)}(P)=\frac{1}{2\pi}\iint f^{(n)}(Q)\,d\omega_a; \\ U_i(P)=\frac{1}{2\pi}\iint f(Q)\,d\omega_i,\ U_i'(P)=\frac{1}{2\pi}\iint f'(Q)\,d\omega_i,\ldots, \\ U_i^{(n)}(P)=\frac{1}{2\pi}\iint f^{(n)}(Q)\,d\omega_i. \end{cases}$$

Dann ist, wenn wir die Bezeichnung S. 257 beibehalten,

$$(9\text{a})\quad\begin{cases} u(P)=f'(P),\ u'(P)=f''(P),\ u''(P)=f'''(P),\ldots, \\ u^{(n)}(P)=f^{(n+1)}(P); \end{cases}$$

und die Gleichungen (6a), S. 258 ergeben:

$$(10)\quad\begin{cases} \overline{U}_a(P)=f'(P)-f(P),\ \overline{U}_a'(P)=f''(P)-f'(P),\ldots, \\ \overline{U}_a^{(n)}(P)=f^{(n+1)}(P)-f^{(n)}(P); \\ \overline{U}_i(P)=f'(P)+f(P),\ \overline{U}_i'(P)=f''(P)+f'(P),\ldots, \\ \overline{U}_i^{(n)}(P)=f^{(n+1)}(P)+f^{(n)}(P). \end{cases}$$

Bemerkung. Die Bezeichnung der Methode als Methode des arithmetischen Mittels ist aus folgender Eigenschaft der Integrale (8), (8a), (9) entnommen. $d\omega_i$ ist das Flächenelement einer mit dem Radius 1 um den inneren Punkt P beschriebenen Kugel. Denkt man sich auf $d\omega_i$ denjenigen Wert $f(Q)$ aufgetragen, den f an dem Oberflächenelement do, dessen Projektion $d\omega_i$ ist, hat, so ist das über die ganze Kugelfläche erstreckte Integral

$$\frac{1}{4\pi}\iint f(Q)\,d\omega_i$$

das arithmetische Mittel aller Werte, die die Funktion $f(Q)$ auf der Kugel hat; d. h. jenes arithmetische Mittel ist $\frac{1}{2}U_i(P)$. Analoges gilt für $\frac{1}{2}U_i'(P)$, $\frac{1}{2}U_i''(P)$, ...

Auch die Funktionen $f', f'', ..$ kann man als solche arithmetische Mittel auf einer Halbkugel auffassen, und auch $U_a, U_a', ...$ lassen sich, mit gewissen Konstanten multipliziert, ähnlich deuten.

c) Haupteigenschaften der Potentiale $f', f'', ..., f^{(n)}$.

Es soll gezeigt werden, daß die Funktionen $f^{(n)}(P)$ mit wachsendem n einer Konstanten zustreben, daß also

$$\lim_{n=\infty} f^{(n)}(P) = C$$

ist.

Für den Fall, daß f konstant ist $= c$, wird

$$\begin{aligned} & f(P) = f'(P) = f''(P) = \ldots && = c, \\ \text{ferner } & U_a = U_a' = U_a'' = \ldots && = 0, \\ & U_i = U_i' = U_i'' = \ldots && = 2c. \end{aligned}$$

Ist aber $f(Q)$ nicht konstant, so sei G der größte, K der kleinste Wert von $f(Q)$, so daß

$$G - f(Q) \geqq 0, \quad f(Q) - K \geqq 0.$$

Da für alle Punkte Q und für jede Lage des Punktes P auf F $d\omega_F$ positiv ist (vgl. S. 261), so ist

$$\frac{1}{2\pi}\iint (G - f(Q))\, d\omega_F > 0, \quad \frac{1}{2\pi}\iint (f(Q) - K)\, d\omega_F > 0,$$

d. h. wegen (8) und (4a)

(11) $$G - f'(P) > 0, \quad f'(P) - K > 0.$$

Mithin liegt $f'(P)$ für alle Punkte P der Fläche zwisch dem größten und kleinsten Werte von $f(P)$. Das gilt au für den größten Wert G' von $f'(P)$, sowie für sein kleinsten Wert K'; d. h. es ist

(11a) $$G > G' > K' > K.$$

Weiter teile man die Fläche F in zwei Gebiete $F = F_1 + F_2$, derart, daß

$$\text{in } F_1 \qquad K \leqq f(Q) \leqq \frac{G+K}{2},$$

$$\text{in } F_2 \qquad \frac{G+K}{2} \leqq f(Q) \leqq G$$

ist. Dann zerfallt auch $f'(P)$ in zwei Summanden:

$$f'(P) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{F} f(Q)\,d\omega_F = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{F_1} f(Q)\,d\omega_F + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{F_2} f(Q)\,d\omega_F.$$

Setzt man im ersten Integral rechts K an Stelle von $f(Q)$, im zweiten aber $\frac{G+K}{2}$, so erhält man rechts zu Kleines, d. h. es wird

$$f'(P) > \frac{K}{2\pi}\iint\limits_{F_1} d\omega_F + \frac{G+K}{4\pi}\iint\limits_{F_2} d\omega_F;$$

ebenso wird

$$f'(P) < \frac{G+K}{4\pi}\iint\limits_{F_1} d\omega_F + \frac{G}{2\pi}\iint\limits_{F_2} d\omega_F.$$

Da aber

$$\iint\limits_{F_1} d\omega_F + \iint\limits_{F_2} d\omega_F = \iint\limits_{F} d\omega_F$$

ist, so kann man die beiden letzten Ungleichungen so schreiben:

$$f'(P) > \frac{K}{2\pi}\iint\limits_{F} d\omega_F + \frac{G-K}{4\pi}\iint\limits_{F_2} d\omega_F,$$

$$f'(P) < \frac{G}{2\pi}\iint\limits_{F} d\omega_F - \frac{G-K}{4\pi}\iint\limits_{F_1} d\omega_F$$

oder wegen (4a)

$$(12)\qquad \begin{cases} f'(P) > K + \dfrac{G-K}{4\pi}\displaystyle\iint\limits_{F_2} d\omega_F, \\[2ex] f'(P) < G - \dfrac{G-K}{4\pi}\displaystyle\iint\limits_{F_1} d\omega_F. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen, in denen P ein beliebiger Punkt der Fläche F ist, wenden wir auf zwei verschiedene Punkte an, die erste auf einen Punkt P_1, die zweite auf einen Punkt P_2. Wir unterscheiden diese verschiedenen Lagen von

P auch in der Bezeichnung von $d\,\omega_F$, indem wir dafür im ersten Falle $d\,\omega_F^{(1)}$, im zweiten $d\,\omega_F^{(2)}$ setzen; so lauten die Ungleichungen (12):

$$(12\text{a})\qquad \begin{cases} f'(P_1) > K + \dfrac{G-K}{4\pi}\displaystyle\iint\limits_{F_2} d\,\omega_F^{(1)}, \\[2ex] f'(P_2) < G - \dfrac{G-K}{4\pi}\displaystyle\iint\limits_{F_1} d\,\omega_F^{(2)}. \end{cases}$$

P_1 war nun ein beliebiger Punkt von F; wir wählen seine Lage speziell so, daß in P_1 die Funktion $f'(P)$ den kleinsten Wert K', den sie in F annehmen kann, hat, während P_2 so gewählt wird, daß in ihm die Funktion $f'(P)$ ihren größten Wert G' hat, so folgt aus (12a)

$$(13)\qquad \begin{cases} K' > K + \dfrac{G-K}{4\pi}\displaystyle\iint\limits_{F_2} d\,\omega_F^{(1)}, \\[2ex] G' < G - \dfrac{G-K}{4\pi}\displaystyle\iint\limits_{F_1} d\,\omega_F^{(2)} \end{cases}$$

und hieraus durch Subtraktion:

$$(13\text{a})\quad G' - K' < (G-K)\left\{1 - \frac{1}{4\pi}\left[\iint\limits_{F_2} d\,\omega_F^{(1)} + \iint\limits_{F_1} d\,\omega_F^{(2)}\right]\right\}.$$

Nun ist jedes der beiden Integrale auf der rechten Seite von (13a) positiv, aber kleiner als 2π; denn nach (4a) ist

$$\iint\limits_{F} d\,\omega_F^{(1)} = \iint\limits_{F_1} d\,\omega_F^{(1)} + \iint\limits_{F_2} d\,\omega_F^{(1)} = 2\pi,$$

mithin

$$\iint\limits_{F_2} d\,\omega_F^{(1)} = 2\pi - \iint\limits_{F_1} d\,\omega_F^{(1)},$$

d. h. 2π, vermindert um eine positive Größe, also $< 2\pi$. Somit haben wir

$$0 < \iint\limits_{F_2} d\,\omega_F^{(1)} < 2\pi,$$

ebenso

$$0 < \iint\limits_{F_1} d\,\omega_F^{(2)} < 2\pi,$$

daher

$$0 < \frac{1}{4\pi}\left[\iint\limits_{F_2} d\omega_F^{(1)} + \iint\limits_{F_1} d\,\omega_F^{(2)}\right] < 1,$$

oder es ist

$$(14) \qquad 1 > 1 - \frac{1}{4\pi}\left[\iint\limits_{F_2} d\,\omega_F^{(1)} + \iint\limits_{F_1} d\,\omega_F^{(2)}\right] > 0.$$

Der zweite Faktor der rechten Seite von (13a) ist also ein positiver echter Bruch λ

$$(14\text{a}) \qquad \lambda = 1 - \frac{1}{4\pi}\left[\iint\limits_{F_2} d\,\omega_F^{(1)} + \iint\limits_{F_1} d\,\omega_F^{(2)}\right],$$

und (13a) geht in

$$(15) \qquad G' - K' < (G - K)\,\lambda$$

über. Ebenso ergeben sich, wenn G'' und K'' den größten und kleinsten Wert von f'', G''' und K''' den größten und kleinsten Wert von f''',... bezeichnen, die Ungleichungen:

$$(15\text{a}) \qquad \begin{cases} G'' - K'' < (G' - K')\,\lambda', \\ G''' - K''' < (G'' - K'')\,\lambda'', \\ \text{— — — — — — — — — — —} \\ G^{(n)} - K^{(n)} < (G^{(n-1)} - K^{(n-1)})\,\lambda^{(n-1)}, \end{cases}$$

wo $\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n-1)}$ sämtlich positive echte Brüche sind. Ist ferner $\overline{\lambda}$ der größte der echten Brüche $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$, so ist auch

$$(15\text{b}) \qquad \begin{cases} G' - K' < \overline{\lambda}(G - K), \\ G'' - K'' < \overline{\lambda}(G' - K'), \\ \text{— — — — — — — — — —} \\ G^{(n)} - K^{(n)} < \overline{\lambda}\,(G^{(n-1)} - K^{(n-1)}), \end{cases}$$

folglich

$$(16) \qquad G^{(n)} - K^{(n)} < \overline{\lambda}^{\,n}(G - K),$$

und da $\overline{\lambda}$ ein echter Bruch, daher $\lim\limits_{n=\infty}\overline{\lambda}^n=0$, ist auch

(16a) $$\lim_{n=\infty}(G^{(n)}-K^{(n)})=0.$$

Sind aber der größte und kleinste Wert einer stetigen Funktion gleich, so ist diese eine Konstante, oder es ist

(16b) $$\lim_{n=\infty}f^{(n)}(P)=C,$$

wo C eine Konstante ist.

Folgerungen. Nach (11a) ist

$$G>G'>K'>K,$$

ebenso $$G'>G''>K''>K',$$

mithin $$G>G''>K''>K.$$

In gleicher Weise ergibt sich, wenn p, q beliebige positive Zahlen sind,

$$G^{(p)}>G^{(p+q)}>K^{(p+q)}>K^{(p)}.$$

Die Funktion $f^{(p+q)}(P)$ ist kleiner als $G^{(p+q)}$, daher erst recht kleiner als $G^{(p)}$, andererseits ist $f^{(p+q)}$ größer als $K^{(p)}$, d. h. wir haben

$$f^{(p+q)}<G^{(p)},\quad f^{(p+q)}>K^{(p)},$$
$$f^{(p)}\quad >K^{(p)},\quad f^{(p)}\quad <G^{(p)},$$

folglich

$$f^{(p+q)}-f^{(p)}<G^{(p)}-K^{(p)} \text{ und } f^{(p+q)}-f^{(p)}>-[G^{(p)}-K^{(p)}],$$

d. h. $$|f^{(p+q)}-f^{(p)}|<G^{(p)}-K^{(p)}$$

oder wegen (16)

(17) $$|f^{(p+q)}-f^{(p)}|<\overline{\lambda}^p(G-K).$$

Läßt man in (17) $q=\infty$ werden, so wird wegen (16b)

(17a) $$|C-f^{(p)}|<\overline{\lambda}^p(G-K).$$

d) Lösung der ersten Randwertaufgabe für den Innenraum T der Fläche F.

Aus den Funktionen $U_i, U_i', \ldots$ [S. 263, Gl. (9)] bilde man die endliche Summe

(18) $$\Omega_i^{(n)}=C+U_i(P)-U_i'(P)+U_i''(P)-U_i'''(P)+\ldots$$
$$+U_i^{(n-1)}(P)-U_i^{(n)}(P),$$

wo n eine ungerade ganze Zahl ist, C die durch (16b) bestimmte Konstante. Die rechte Seite von (18) kann man, wenn man für die U_i ihre Werte setzt, auch so schreiben:

$$(18a) \quad \Omega_i^{(n)} = C + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{F} [f(Q) - f'(Q) + f''(Q) - f'''(Q) + \ldots \\ + f^{(n-1)}(Q) - f^{(n)}(Q)]\, d\omega_i .$$

Diese Funktion $\Omega_i^{(n)}$ hat für alle inneren Punkte P von F die charakteristischen Eigenschaften des Potentials einer einfach belegten Fläche, da die einzelnen Summanden der rechten Seite von (18) diese Eigenschaft haben (vgl. S. 256). $\Omega_i^{(n)}$ ist also für alle Innenpunkte von F nebst allen Ableitungen endlich und stetig, und $\Omega_i^{(n)}$ genügt der Laplaceschen Differentialgleichung. Rückt ferner der Aufpunkt P von innen beliebig nahe an F heran und nennen wir den Wert, den $\Omega_i^{(n)}$ dabei annimmt, $\overline{\Omega}_i^{(n)}$, so ist

$$\overline{\Omega}_i^{(n)} = C + \overline{U}_i(P) - \overline{U}_i'(P) + \overline{U}_i''(P) - \overline{U}_i'''(P) + \ldots \\ + \overline{U}_i^{(n-1)}(P) - \overline{U}_i^{(n)}(P),$$

d. i. wegen der Gleichungen (10)

$$\overline{\Omega}_i^{(n)} = C + f'(P) + f(P) - [f''(P) + f'(P)] + [f'''(P) + f''(P)] \\ - [f''''(P) + f'''(P)] + \ldots + [f^{(n)}(P) + f^{(n-1)}(P)] \\ - [f^{(n+1)}(P) + f^{(n)}(P)]$$

oder

$$(18b) \qquad \overline{\Omega}_i^{(n)} = C + f(P) - f^{(n+1)}(P).$$

Wir wollen nun untersuchen, was aus $\Omega_i^{(n)}$ und $\overline{\Omega}_i^{(n)}$ wird, wenn man von einer endlichen Zahl von Summanden zu $n = \infty$ übergeht. Dazu betrachten wir die unendliche Reihe

$$(19) \qquad f(Q) - f'(Q) + f''(Q) - f'''(Q) + \cdots\cdots,$$

nennen S_n die Summe der $(n+1)$ ersten Glieder (n ungerade), R_n den Rest der Reihe

$$(19a) \quad R_n = f^{(n+1)}(Q) - f^{(n+2)}(Q) + f^{(n+3)}(Q) - f^{(n+4)}(Q) + \cdots\cdots$$

Nach (17) ist der absolute Wert der einzelnen Differenzen

$$|f^{(n+1)}(Q)-f^{(n+2)}(Q)|<\bar{\lambda}^{(n+1)}(G-K),$$
$$|f^{(n+3)}(Q)-f^{(n+4)}(Q)|<\bar{\lambda}^{(n+3)}(G-K),$$
$$- - - - - - - - - - - - - - -$$

daher

$$|R_n|<(G-K)\bar{\lambda}^{n+1}[1+\bar{\lambda}^2+\bar{\lambda}^4+\ldots]$$

oder

$$|R_n|<\frac{(G-K)\bar{\lambda}^{n+1}}{1-\bar{\lambda}^2}. \tag{20}$$

Da $\bar{\lambda}$ ein positiver echter Bruch ist, folgt aus (20)

(20a) $\lim\limits_{n=\infty}|R_n|=0$, $\lim\limits_{n=\infty} S_n$ bleibt endlich.

Die unendliche Reihe (19) ist also konvergent, ihre Summe ist endlich, und wenn man diese endliche Summe mit $d\omega_i$ multipliziert und über F integriert, erhält man ebenfalls Endliches. Führt man die Bezeichnung ein

$$\lim_{n=\infty}\Omega_i^{(n)}=\Omega_i, \tag{21}$$

so hat also Ω_i für alle inneren Punkte P einen endlichen Wert, und Ω_i hat, wie $\Omega_i^{(n)}$ alle charakteristischen Eigenschaften des Potentials. Nennt man ferner $\bar{\Omega}_i$ den Wert, den Ω_i annimmt, wenn sich P der Fläche F beliebig nähert, so wird nach (18b) und (16b)

$$\bar{\Omega}_i=\lim_{n=\infty}\bar{\Omega}_i^{(n)}=C+f(P)-C=f(P). \tag{22}$$

Die Funktion (21) ist somit die Lösung der ersten Randwertaufgabe für den Innenraum T von F.

e) Lösung der ersten Randwertaufgabe für den Außenraum T' von F.

α) Bestimmung einer Fundamentalfunktion dieses Raumes.

Aus den Doppelbelegungspotentialen $U_a, U_a', \ldots$ (S. 263) bilde man die endliche Summe

$$\Phi_a^{(n)}=-U_a(P)-U_a'(P)-U_a''(P)-\ldots\quad -U_a^{(n)}, \tag{23}$$

in der n eine beliebige ganze Zahl ist. Die rechte Seite von (23) kann man, wenn man für die U_a ihre Werte einsetzt, auch so schreiben:

$$(23\text{a})\quad \Phi_a^{(n)} = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\overline{F}} [f(Q) + f'(Q) + f''(Q) + \cdots + f^{(n)}(Q)]\, d\omega_a$$

oder auch, da nach (2a) $\iint\limits_{\overline{F}} d\omega_a = 0$ ist,

$$(23\text{b})\quad \Phi_a^{(n)} = +\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\overline{F}} [C - f(Q) + C - f'(Q) + \cdots + C - f^{(n)}(Q)]\, d\omega_a,$$

wo C wiederum die durch (16b) definierte Konstante ist. Die Funktion $\Phi_a^{(n)}$ hat für alle Punkte P des Außenraumes T' von F die charakteristischen Eigenschaften der Potentialfunktion, da die einzelnen Summanden von (23) diese Eigenschaften haben. Bezeichnet man ferner mit $\overline{\Phi}_a^{(n)}$ den Wert, in den $\Phi_a^{(n)}$ übergeht, wenn P der Fläche F beliebig nahekommt, so wird mit Berücksichtigung der Gleichung (10), S. 263

$$(23\text{c})\left\{\begin{aligned} \overline{\Phi}_a^{(n)} &= -\overline{U}_a(P) - \overline{U}_a'(P) - \cdots - \overline{U}_a^{(n)}(P) \\ &= -[f'(P) - f(P)] - [f''(P) - f'(P)] - \cdots \\ &\qquad - [f^{(n+1)}(P) - f^{(n)}(P)] \\ &= f(P) - f^{(n+1)}(P). \end{aligned}\right.$$

Auch hier gehen wir von der endlichen Reihe $\Phi_a^{(n)}$ zur unendlichen Reihe über. Dazu untersuchen wir die unendliche Reihe

$$(24)\qquad C - f(Q) + C - f'(Q) + C - f''(Q) + \cdots$$

und nennen die Summe der $n+1$ ersten Glieder S_n', den Rest R_n', also

$$(24\text{a})\qquad R_n' = C - f^{(n+1)}(Q) + C - f^{(n+2)}(Q) + \cdots.$$

Nach (17a) ist

$$|C - f^{(n+1)}(Q)| \overline{<} \lambda^{n+1}(G - K),$$
$$|C - f^{(n+2)}(Q)| \overline{<} \lambda^{n+2}(G - K),$$
$$\text{— — — — — — — — — — — —}$$

daher $$|R_n'| < (G-K)[\bar{\lambda}^{n+1} + \bar{\lambda}^{n+2} + \ldots]$$

oder

(25) $$|R_n'| < \frac{(G-K)\bar{\lambda}^{n+1}}{1-\bar{\lambda}}.$$

Da $\bar{\lambda}$ ein echter Bruch, folgt aus (25):

(25a) $$\lim_{n=\infty} |R_n'| = 0, \quad \lim_{n=\infty} S_n' \text{ bleibt endlich.}$$

Aus (23b) ergibt sich daher, daß

$$\lim_{n=\infty} \Phi_a^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\iint_F \lim S_n' \cdot d\,\omega_a$$

endlich ist. Wir führen die Bezeichnung ein

(26) $$\lim_{n=\infty} \Phi_a^{(n)} = \Phi_a, \quad \lim_{n=\infty} \bar{\Phi}_a^{(n)} = \bar{\Phi}_a,$$

so folgt aus (23c)

(27) $$\bar{\Phi}_a = f(P) - C.$$

Die Funktion

(28) $$C + \Phi_a$$

nimmt daher an $\dot{F}$ den gegebenen Wert $f(P)$ an. Diese Funktion hat ferner im Außenraum T' von F alle charakteristischen Eigenschaften der Potentialfunktion; nur wird im Unendlichen $\Phi_a = 0$, da dort sämtliche U_a verschwinden, und die Funktion (28) hat daher im Unendlichen den Wert C. Der Funktion (28), die C. Neumann eine Fundamentalfunktion des Raumes T' nennt, fehlt somit eine wesentliche Eigenschaft der gesuchten Potentialfunktion.

β) Bildung der Potentialfunktion des Außenraums aus der Fundamentalfunktion (28).

Wir bestimmen die Funktionen $f', f'', \ldots$ (Seite 262) für eine spezielle Annahme über die gegebene Funktion $f(P)$, und zwar nehmen wir

(29) $$f(P) = \frac{1}{E_{PO}}, \quad f(Q) = \frac{1}{E_{QO}},$$

wo E_{PO} und E_{QO} die Abstände der Flächenpunkte P, Q von einem innerhalb F gelegenen, im übrigen beliebig anzunehmenden Punkte O bezeichnen. Die aus den Werten (29) entstehenden Funktionen $f', f'', ..$ sollen mit $\varphi', \varphi'', \ldots$ bezeichnet werden zum Unterschiede von den aus einem beliebig gegebenen f entstehenden. Wir setzen also

$$(30)\quad \varphi'(P) = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{1}{E_{QO}}\, d\,\omega_F, \quad \varphi''(P) = \frac{1}{2\pi}\iint \varphi'(Q)\, d\,\omega_F, \ldots,$$
$$\varphi^{(n)}(P) = \frac{1}{2\pi}\iint \varphi^{(n-1)}(Q)\, d\,\omega_F.$$

Den konstanten Wert, dem $\varphi^{(n)}(P)$ mit wachsenden n zustrebt [s. Gl. (16b)], nennen wir Γ, also

$$(30\text{a})\qquad \lim \varphi^{(n)}(P) = \Gamma.$$

Die Potentiale der hier auftretenden Doppelbelegungen wollen wir zum Unterschied von den allgemeinen mit $W_a, W_a', ..$ bezeichnen, also

$$(31)\quad W_a(P) = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{1}{E_{QO}}\, d\,\omega_a, \quad W_a'(P) = \frac{1}{2\pi}\iint \varphi'(Q)\, d\,\omega_a, \ldots,$$
$$W_a^{(n)}(P) = \frac{1}{2\pi}\iint \varphi^{(n)}(Q)\, d\,\omega_a,$$

in welchen Gleichungen P ein Punkt von T' ist, also außerhalb F liegt; und die Werte, die diese Funktionen annehmen, wenn P der Fläche F beliebig nahe kommt, seien, analog wie früher,

$$(31\text{a})\qquad \overline{W}_a(P),\ \overline{W}_a'(P), \ldots,\ \overline{W}_a^{(n)}(P), \ldots$$

Weiter bilden wir (für äußere Punkte) die Funktion

$$(32)\quad \Pi_a(P) = \frac{1}{E_{PO}} + W_a(P) + W_a'(P) + W_a''(P) + \ldots (\text{in inf.}).$$

Die Konvergenz der rechtsstehenden Reihe folgt ja aus dem oben Erörterten. Rückt der Punkt P beliebig nahe

an die Fläche heran, was durch $\overline{\Pi}_a(P)$ bezeichnet werden soll, so wird nach (27)

$$\overline{W}_a(P) + \overline{W}_a'(P) + \ldots = \Gamma - \varphi(P) = \Gamma - \frac{1}{E_{PO}},$$

daher

(32a) $$\overline{\Pi}_a(P) = \Gamma.$$

Bildet man jetzt die weitere Funktion

(33) $$X_a(P) = \frac{C \cdot \Pi_a(P)}{\Gamma} + \Phi_a,$$

wo Φ_a fur beliebig gegebene Werte von f die durch (26) definierte Funktion ist, C der Grenzwert von $f^n(P)$ für $n = \infty$, so wird nach (32a) und (27) fur Punkte, die der Grenzfläche beliebig nahe liegen,

(33a) $$\overline{X}_a(P) = \frac{C \cdot \Gamma}{\Gamma} + f(P) - C = f(P).$$

$X_a(P)$ genügt danach, da Φ_a und $\Pi_a(P)$ im Unendlichen verschwinden, allen Forderungen und ist die gesuchte Potentialfunktion des Außenraums.

Aus X_a und Ω_i ergibt sich auf bekannte Weise die Dichtigkeit, mit der man die Fläche F belegen muß, damit das Potential dieser Belegung an F den Wert $f(P)$ hat.

γ) Bedeutung der in β) auftretenden Hilfsfunktion $\Pi_a(P)$.

$\Pi_a(P)$ ist ebenfalls das Potential von Massen, die auf F verteilt sind; denn es hat für den ganzen Außenraum alle charakteristischen Eigenschaften des Flächenpotentials. An F selbst nimmt nach (32a) Π_a den konstanten Wert Γ an. Das Potential dieser Massen hat daher für alle inneren Punkte von F ebenfalls den konstanten Wert Γ. Ferner folgt aus (32)

(34) $$\lim_{PO=\infty} (E_{PO} \cdot \Pi_a(P)) = 1,$$

da nach S. 256, Anmerkung $\lim\limits_{r=\infty} (r\, W_a)$, $\lim\limits_{r=\infty} (r\, W_a'), \ldots$ sämtlich verschwinden. Mithin stellt Π_a das Potential dar,

das sich ergibt, wenn man die Masse 1 auf F so verteilt, daß ihr Potential an F einen konstanten Wert hat. Mit der Ermittelung von Π_a ist zugleich die Aufgabe gelöst, die Verteilung freier Elektrizität von der Masse 1 auf einem Leiter, dessen Grenzfläche F ist, zu bestimmen, falls keine äußeren Kräfte einwirken. Die Dichtigkeit $\bar{\varkappa}$ der Massenbelegung ist, da das Potential innerhalb F konstant ist,

$$\bar{\varkappa} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \Pi_a}{\partial N}\right). \tag{34a}$$

C. Neumann nennt diese Belegung die „natürliche Belegung" der Fläche F, $\bar{\varkappa}$ die Dichtigkeit der natürlichen Belegung.

Ist die Masse M statt 1 auf F so zu verteilen, daß ihr Potential an F konstant ist, so ist ihr Potential für äußere Punkte $M\Pi_a$, für innere Punkte hat es den konstanten Wert $M\Gamma$, und die Dichtigkeit ist $M\bar{\varkappa}$.

δ) Die Greensche Funktion für den Innenraum von F.

Bildet man, von $f(Q) = \dfrac{1}{E_{QO}}$ ausgehend, die Potentiale der Doppelbelegungen für innere Punkte von F:

$$W_i = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{1}{E_{QO}}\, d\omega_i, \quad W_i' = \frac{1}{2\pi}\iint \varphi'(Q)\, d\omega_i, \ldots \tag{35}$$

und daraus die Funktion

$$\Omega_i' = \Gamma + W_i - W_i' + W_i'' - W_i''' + \ldots \text{ in infin.,} \tag{35a}$$

so wird an der Fläche F nach (22)

$$\overline{\Omega}_i' = \varphi(P) = \frac{1}{E_{PO}}. \tag{35b}$$

Ω_i' hat im ganzen Innern von F die charakteristischen Eigenschaften der Potentialfunktion und nimmt an F den Wert $\dfrac{1}{E_{PO}}$ an, wo E_{PO} den Abstand eines Punktes P auf F

von einem beliebigen Innenpunkte O bezeichnet. $\Omega_i' - \frac{1}{E_{PO}}$ ist mithin die erste Greensche Funktion für den Innenraum T von F mit dem Pole O.

f) Anwendung der allgemeinen Formeln auf eine Kugelfläche.

Die Polarkoordinaten eines Punktes Q der Kugelfläche seien $R, \vartheta_1, \varphi_1$, die eines im Innen- oder Außenraum gelegenen Punktes P seien r, ϑ, φ. Die gegebenen Werte der Potentialfunktion an der Kugel, $f(Q) = f(\vartheta_1, \varphi_1)$, entwickle man nach Kugelfunktionen:

$$f(Q) = f(\vartheta_1, \varphi_1) = \sum_0^\infty Y_n(\vartheta_1, \varphi_1), \tag{36}$$

dann hat das Potential der doppelt belegten Kugelfläche, deren Moment $\mu = \frac{1}{2\pi} f(\vartheta_1, \varphi_1)$ ist, nach S. 105, Gl. (14) für innere und äußere Punkte die Werte

$$U_i(P) = 2\sum_{n=0}^\infty \frac{n+1}{2n+1}\left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\vartheta, \varphi), \tag{37}$$

$$U_a(P) = -2\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{2n+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\vartheta, \varphi),$$

da in der letzteren Summe das Glied $n=0$ verschwindet. Daher wird

$$\overline{U}_i(P) = 2\sum_{n=0}^\infty \frac{n+1}{2n+1} Y_n(\vartheta, \varphi), \tag{37a}$$

$$\overline{U}_a(P) = -2\sum_1^\infty \frac{n}{2n+1} Y_n(\vartheta, \varphi)$$

und

$$f'(P) = \frac{\overline{U}_i(P) + \overline{U}_a(P)}{2} = \sum_0^\infty \frac{1}{2n+1} Y_n(\vartheta, \varphi). \tag{37b}$$

Um die Potentiale der Doppelbelegung vom Moment $\frac{1}{2\pi} f'(P)$ zu bilden, hat man, wie die Vergleichung von (36) und (37b) zeigt, in (37) nur $\frac{1}{2n+1} Y_n(\vartheta, \varphi)$ an Stelle von $Y_n(\vartheta, \varphi)$ zu setzen, so daß

$$U_i'(P) = 2\sum_0^\infty \frac{n+1}{(2n+1)^2}\left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\vartheta, \varphi),$$

$$U_a'(P) = -2\sum_1^\infty \frac{n}{(2n+1)^2}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\vartheta, \varphi)$$

und

$$f''(P) = \frac{\overline{U}_i'(P) + \overline{U}_a'(P)}{2} = \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} Y_n(\vartheta, \varphi)$$

wird. In gleicher Weise kann man mit der Bildung der U fortfahren und erhält:

$$\text{(37c)} \quad \left\{ \begin{aligned} U_i^{(p)} &= 2\sum_0^\infty \frac{n+1}{(2n+1)^{p+1}}\left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\vartheta, \varphi), \\ U_a^{(p)} &= -2\sum_1^\infty \frac{n}{(2n+1)^{p+1}}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\vartheta, \varphi), \\ f^{(p+1)}(P) &= \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^{p+1}} Y_n(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \right.$$

Geht man zur Grenze fur $p = \infty$ über, so wird $\frac{1}{(2n+1)^{p+1}} = 0$ für alle $n > 0$, dagegen wird für $n = 0$ jenes Glied $= 1$, mithin wird

$$\text{(38)} \qquad \lim_{p=\infty} f^{(p+1)}(P) = Y_0,$$

und die Kugelfunktion Y_0 ist eine Konstante. Die allgemein mit C bezeichnete Konstante hat hier den Wert Y_0.

Ferner wird

$$\Omega_i = Y_0 + 2\sum_0^\infty (n+1)\left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\vartheta,\varphi)$$
$$\cdot\left[\frac{1}{(2n+1)} - \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^3} - \frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right]$$
$$= Y_0 + 2\sum_1^\infty 2n(n+1)\left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\vartheta,\varphi)\left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right],$$

(da das Glied für $n=0$ verschwindet), d. h. nach Ausführung der Summation wird

$$\text{(39)} \qquad \Omega_i = Y_0 + \sum_1^\infty \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\vartheta,\varphi) = \sum_0^\infty \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\vartheta,\varphi).$$

Ferner wird

$$\text{(40)} \begin{cases} \Phi_a = +2\sum_1^\infty n\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\vartheta,\varphi)\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots\right] \\ \qquad = \sum_1^\infty \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\vartheta,\varphi), \\ \Phi_a + C = Y_0 + \sum_1^\infty \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\vartheta,\varphi). \end{cases}$$

Zur Bildung der Funktion Π_a muß man von dem speziellen Werte $f(Q) = \frac{1}{E_{QO}}$ ausgehen, wobei O ein innerer Punkt der Kugel ist. Sind dessen Koordinaten $r_0, \vartheta_0, \varphi_0$ $(r_0 < R)$, so ist

$$\text{(41)} \quad \frac{1}{E_{QO}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2r_0 R\cos\gamma_0}},$$
$$\cos\gamma_0 = \cos\vartheta_1\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta_1\sin\vartheta_0\cos(\varphi_1 - \varphi_0),$$

und wenn man $1|E_{QO}$ nach Potenzen von r_0 entwickelt,

$$\text{(41a)} \qquad \frac{1}{E_{QO}} = \sum_0^\infty \frac{r_0^n}{R^{n+1}} P_n(\cos\gamma_0).$$

An Stelle der allgemeinen Funktion $Y_n(\vartheta_1, \varphi_1)$ tritt hier also die Funktion

$$\frac{r_0^n}{R^{n+1}} P_n(\cos\gamma_0),$$

an Stelle von $Y_n(\vartheta, \varphi)$ somit die Funktion

$$(42) \qquad \frac{r_0^n}{R^{n+1}} P_n(\cos\delta),$$

wo

$$\cos\delta = \cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi - \varphi_0)$$

ist. Demnach wird

$$\varphi^{(p+1)}(P) = \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^{p+1}} \frac{r_0^n}{R^{n+1}} P_n(\cos\delta)$$

und

$$(43) \qquad \lim_{p=\infty} \varphi^{(p+1)}(P) = \frac{1}{R}, \text{ d. h. } \Gamma = \frac{1}{R}.$$

Die Konstante Γ hat hier den Wert $\frac{1}{R}$. Die Funktionen $W_a, W_a', \ldots$ ergeben sich aus den obigen $U_a, U_a', \ldots$, indem man an Stelle von $Y_n(\vartheta, \varphi)$ den Ausdruck (42) setzt. Ferner ist (für Punkte außerhalb der Kugel)

$$\frac{1}{E_{PO}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos\delta}} = \sum_0^\infty \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\delta),$$

daher

$$\begin{aligned}
(44) \quad \Pi_a(P) &= \sum_0^\infty \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\delta) \\
&\quad - 2\sum_1^\infty n\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{r_0^n}{R^{n+1}} P_n(\cos\delta)\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots\right] \\
&= \sum_0^\infty \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\delta) - \sum_1^\infty \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\delta) \\
&= \frac{1}{r}.
\end{aligned}$$

Endlich wird

$$X_a(P) = \frac{Y_0 \cdot \frac{1}{r}}{\left(\frac{1}{R}\right)} + \sum_1^\infty \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\vartheta, \varphi) = \sum_0^\infty \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\vartheta, \varphi). \tag{45}$$

Die sich hier ergebenden Lösungen der ersten Randwertaufgabe Ω_i [Gl. (39)] für das Innere, X_a [Gl. (45)] für den Außenraum der Kugel sind genau die gleichen wie die S. 117 abgeleiteten.

Die Dichtigkeit der „natürlichen Belegung" der Kugel ist nach (34a)

$$\bar{\varkappa} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{1}{4\pi R^2}; \tag{46}$$

der konstante Potentialwert der natürlichen Belegung ist an der Kugel und im Innern $= \frac{1}{R}$, der Potentialwert für Punkte außerhalb $\frac{1}{r}$.

Die Funktionen $W_i, W_i', \ldots$ [Gl. (35), S. 275] werden für die Kugel

$$\left\{\begin{aligned} W_i(P) &= 2\sum_0^\infty \frac{n+1}{2n+1}\left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{r_0^n}{R^{n+1}} P_n(\cos\delta), \\ W_i'(P) &= 2\sum_0^\infty \frac{n+1}{(2n+1)^2}\left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{r_0^n}{R^{n+1}} P_n(\cos\delta), \end{aligned}\right. \tag{47}$$

daher

$$\begin{aligned} \Omega_i' &= \Gamma + W_i - W_i' + W_i'' - W_i''' + \ldots \\ &= \frac{1}{R} + 2\sum_1^\infty 2n(n+1)\frac{r^n r_0^n}{R^{2n+1}} P_n(\cos\delta)\left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right] \\ &= \frac{1}{R} + \sum_1^\infty \frac{r^n r_0^n}{R^{2n+1}} P_n(\cos\delta) \end{aligned}$$

d. h.

$$\Omega_i' = \sum_0^\infty \frac{r^n r_0^n}{R^{2n+1}} P_n(\cos\delta), \tag{48}$$

ein Ausdruck, der mit dem Ausdruck fur G [S. 119, Gl. (20)] übereinstimmt, so daß

(48a) $$\Omega_i' - \frac{1}{E_{PO}}$$

für innere Punkte P die Greensche Funktion mit dem Pole O ist.

Zusatz. Die Formeln für $f'(P), f''(P), \ldots$ waren oben (S. 276, Gl. 37b) mittels der allgemeinen Gleichung

$$f'(P) = u(P) = \frac{\overline{U}_a(P) + \overline{U}_i(P)}{2}$$

hergeleitet. Es soll nunmehr für den Ausdruck $f'(P)$ [Gl. (37b)] eine direkte Herleitung gegeben werden.

In dem Ausdruck (8), S. 262 für $f'(P)$ ist zunächst $d\omega_F$ für die Kugel zu bilden. Dazu betrachten wir das gleichschenklige Dreieck, das die beiden Punkte P, Q der Kugelfläche und den Kugelmittelpunkt M zu Ecken hat. Darin ist $PQ = \varrho$ und der Winkel (ϱ, N) ist der Scheitelwinkel des Winkels PQM, daher

$$\cos(\varrho, N) = \frac{\varrho}{2R}, \quad \frac{\cos(\varrho, N)}{\varrho^2} = \frac{1}{2\varrho R}.$$

Drückt man ϱ durch die Polarkoordinaten der Punkte P, Q aus, so ist, da hier auch $r = R$ ist,

$$\varrho^2 = 2R^2(1 - \cos\gamma), \quad \cos\gamma = \cos\vartheta \cos\vartheta_1 + \sin\vartheta \sin\vartheta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi).$$

Ferner ist do das Flächenelement der Kugel bei Q, daher

$$d\omega_F = \frac{\cos(\varrho, N)\, do}{\varrho^2} = \frac{\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1}{2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\gamma}}$$

und

(49) $$f'(P) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \int\!\!\int f(\vartheta_1, \varphi_1) \frac{\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1}{\sqrt{1 - \cos\gamma}}.$$

In diesem über die Kugelfläche zu erstreckenden Integral führe man (analog wie in Teil I, S. 108) statt ϑ_1, φ_1 neue

Variable γ, λ ein, indem man als neue Polarachse den durch P gehenden Kugelradius nimmt. War z der Punkt, in dem die alte Polarachse die Kugel trifft, so wird in dem sphärischen Dreieck zPQ, $zP = \vartheta$, $zQ = \vartheta_1$, $PQ = \gamma$, $\sphericalangle QzP = \varphi_1 - \varphi$.*) Nimmt man $\sphericalangle zPQ = \lambda$, so kann man mittels bekannter Formeln der sphärischen Trigonometrie ϑ_1 und $\varphi_1 - \varphi$ durch γ, λ und ϑ ausdrücken. In den neuen Variabeln wird das Flächenelement der Kugel $\sin\gamma\, d\gamma\, d\lambda$; zugleich gehe $f(\vartheta_1, \varphi_1)$ in $\psi\,(\gamma, \lambda)$ über, so wird

$$f'(P) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \int\!\!\int \frac{\psi(\gamma, \lambda) \sin\gamma\, d\gamma\, d\lambda}{\sqrt{1 - \cos\gamma}}. \tag{49a}$$

Entwickelt man $\psi(\gamma, \lambda)$ nach Kugelfunktionen

$$\psi(\gamma, \lambda) = \sum_0^\infty Z_n(\gamma, \lambda), \tag{50}$$

so hat Z_n die Form

$$Z_n(\gamma, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{n} P_{n,\nu}(\cos\gamma)\, [A_{n\nu} \cos(\nu\lambda) + B_{n\nu} \sin(\nu\lambda)], \tag{50a}$$

daher

$$\int_0^{2\pi} Z_n(\gamma, \lambda)\, d\lambda = 2\pi A_{n0} P_{n,0}(\cos\gamma) = 2\pi A_n' P_n(\cos\gamma), \tag{50b}$$

wo $A_n' = A_{n0} \cdot n! : [1 \cdot 3 \ldots (2n-1)]$ ist. Daher wird

$$f'(P) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n' \int_0^{\pi} \frac{P_n(\cos\gamma) \sin\gamma\, d\gamma}{\sqrt{1 - \cos\gamma}}. \tag{51}$$

Das Integral auf der rechten Seite von (51) hat aber, wie sogleich gezeigt werden soll, den Wert $2\sqrt{2} : (2n+1)$, so daß

$$f'(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n'}{2n+1} \tag{51a}$$

wird. Dabei ist zu beachten, daß in $Z_{n\nu}$ die Koeffizienten $A_{n\nu}$, $B_{n\nu}$ zwar Konstante in bezug auf γ, λ sind, aber

---

*) Vgl. Figur 3, S. 8, in der nur A, B durch P, Q zu ersetzen sind.

ihrerseits von ϑ, φ abhängen. Denn drückt man ϑ_1, φ_1 durch γ, λ aus, so enthalten diese Ausdrücke außerdem ϑ, φ. Auch in der Funktion $\psi(\gamma, \lambda)$, die aus $f(\vartheta_1, \varphi_1)$ entsteht, treten daher neben γ, λ noch ϑ, φ auf, infolgedessen auch in $Z_n(\gamma, \lambda)$. Um den Zusammenhang von A_n' mit den früheren Y_n [Gl. (36), S. 276] zu ermitteln, beachten wir, daß, da $f(\vartheta_1, \varphi_1) = \psi(\gamma, \lambda)$, auch

$$(52) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} Y_m(\vartheta_1, \varphi_1) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(\gamma, \lambda)$$

ist. Multipliziert man (52) mit $P_n(\cos\gamma)$ mal dem Flächenelement der Kugel vom Radius 1 und integriert über die Kugelfläche, so kann man dies Flächenelement sowohl durch $\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1$, als durch $\sin\gamma\, d\gamma\, d\lambda$ ausdrücken. Die Integralsätze der Kugelfunktionen ergeben dann

$$(52\text{a}) \qquad \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\vartheta, \varphi) = \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\pi} Z_n(\gamma, \lambda)\, P_n(\cos\gamma) \sin\gamma\, d\gamma.$$

Setzt man für $Z_n(\gamma, \lambda)$ die Reihe (50a) und integriert nach λ, so wird die rechte Seite von (52a)

$$2\pi A_{n0} \int_0^{\pi} P_{n,0}(\cos\gamma)\, P_n(\cos\gamma) \sin\gamma\, d\gamma$$

$$= 2\pi A_n' \int_0^{\pi} [P_n(\cos\gamma)]^2 \sin\gamma\, d\gamma = \frac{4\pi}{2n+1} A_n',$$

d. h. es ist

$$(53) \qquad A_n' = Y_n(\vartheta, \varphi)$$

und wegen (51a)

$$(54) \qquad f'(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} Y_n(\vartheta, \varphi),$$

womit die frühere Gleichung (37b) direkt aus der Definition von $f'(P)$ hergeleitet ist.

Beweis der benutzten Hilfsformel.

Für $a<1$, $-1 \leqq x \leqq +1$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ax+a^2}} = \sum_0^\infty a^n P_n(x),$$

daher

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}\sqrt{1-2ax+a^2}} = \sum_0^\infty a^n \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{1-x}}. \tag{55}$$

Das linksstehende Integral läßt sich ausführen, und zwar ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}\sqrt{1-2ax+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \log\left\{x - \frac{(1+a)^2}{4a} + \frac{\sqrt{(1-x)(1-2ax+a^2)}}{\sqrt{2a}}\right\},$$

daher

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}\sqrt{1-2ax+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \log\frac{(1-a)^2}{(1-\sqrt{a})^4} = \frac{2}{\sqrt{2a}} \log\left(\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2a}} \sum_0^\infty \frac{(\sqrt{a})^{2n+1}}{2n+1} = 2\sqrt{2} \sum_0^\infty \frac{a^n}{2n+1}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in (55) ein, so wird

$$2\sqrt{2} \sum_0^\infty \frac{a^n}{2n+1} = \sum_0^\infty a^n \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{1-x}}, \tag{56}$$

und darin müssen die Koeffizienten von a^n beiderseits gleich sein, d. h.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{2\sqrt{2}}{2n+1}. \tag{57}$$

Das ist aber, wenn man noch x durch $\cos\gamma$ ersetzt, unsere Hilfsformel.

Kapitel 5.

Zurückführung der ersten Randwertaufgabe auf eine Integralgleichung.

Der Aufgabe, für einen endlichen, von einer geschlossenen Fläche F begrenzten Raum T eine Potentialfunktion zu finden, die in den Punkten P der Fläche F den Wert $f(P)$ annimmt, sucht man dadurch zu genügen, daß man eine Doppelbelegung von F bestimmt, deren Potential allen Bedingungen genügt. Das Moment der Doppelbelegung sei $\psi(Q)$, $d o_Q$ das Flächenelement von F im Punkte Q, so ist ihr Potential 1) für innere Punkte P_i von F

$$(1) \qquad U_i(P_i) = -\int\int \psi(Q) \frac{d\frac{1}{E_{QP_i}}}{dN} d o_Q,$$

2) für Punkte P von F

$$(2) \qquad u(P) = -\int\int \psi(Q) \frac{d\frac{1}{E_{QP}}}{dN} d o_Q,$$

worin E_{QP_i} und E_{QP} den Abstand des Punktes Q von P_i, resp. P bezeichnen. Rückt der Punkt P_i an die Fläche F, also in einen der Punkte P, so soll die linke Seite von (1) mit $\overline{U_i}(P)$ bezeichnet werden. Dann ist [vgl. Gl. (6a), S. 258]

$$(3) \qquad \overline{U_i}(P) = u(P) + 2\pi\psi(P).$$

Andererseits soll $\overline{U_i}(P) = f(P)$ sein,

d. h. es soll sein

$$(4) \qquad f(P) = u(P) + 2\pi\psi(P)$$

oder, falls man für $u(P)$ den Ausdruck (2) setzt,

$$\psi(P) = \frac{f(P)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int\!\!\int \psi(Q) \frac{d\frac{1}{E_{QP}}}{dN} \, d o_Q. \tag{5}$$

Damit haben wir zur Bestimmung der unbekannten Funktion ψ eine Integralgleichung gewonnen, d. h. eine Gleichung, in der die unbekannte Funktion sowohl explizite, als unter einem Integralzeichen auftritt.

Die Behandlung solcher Integralgleichungen bildet eine neuerdings viel bearbeitete Theorie, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann. Es sollte nur der Zusammenhang der Randwertaufgabe mit jener Theorie erörtert werden.

Sammlung Schubert

Verzeichnis der zur Zeit vorliegenden Bände:

2 **Grundzüge der ebenen Geometrie** von F Bohnert. Geb. M. 3 80.
3 **Ebene und sphärische Trigonometrie** von F. Bohnert 2 Auflage Geb. M. 5 —
4 **Elementare Stereometrie** von F. Bohnert. 2 Aufl Geb. M. 2.40.
7 **Ebene Geometrie der Lage** von Rud. Boger. Geb. M 5 —
10 **Differential- und Integralrechnung I. Teil: Differentialrechnung** von W Franz Meyer. 2 Aufl Geb. M 10 —.
15 **Einleitung in die Astronomie** von A v. Flotow Mit 1 Tafel Geb. M. 8 —.
18 **Geschichte der Mathematik I. Teil** von S. Günther Geb M 9 60
19 **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung** von N Herz Geb M 8.—.
23 **Geodasie** von A Galle Geb M 8 —.
25 **Analytische Geometrie des Raumes II. Teil: Die Flachen zweiten Grades** von Max Simon. Geb M. 5 40
27 **Geometrische Transformationen I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen** von Karl Doehlemann. Geb. M. 10 —
28 **Geometrische Transformationen II. Teil: Die quadratischen u. höheren, birationalen Punkttransformationen** von Karl Doehlemann. Geb. M 10 —
29 **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flachen I. Teil** von Viktor Kommerell und Karl Kommerell. 2 Aufl. Geb M. 4 80.
30 **Elliptische Funktionen I. Teil: Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt** von Karl Boehm. Geb M. 9.60
31 **Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale** von E Landfriedt Geb. M. 8 50
33 **Allgemeine Formen- und Invariantentheorie I. Teil: Binäre Formen** von W. Franz Meyer. Geb M. 9.60.
34 **Liniengeometrie mit Anwendungen I. Teil** von Konrad Zindler. Gebunden M. 12.—.
35 **Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die linearen Raume** von P H Schoute. Geb M. 10.—.
36 **Mehrdimensionale Geometrie II. Teil: Die Polytope** von P. H. Schoute. Geb. M. 10.—.
37 **Lehrbuch der Mechanik I. Teil: Kinematik** von Karl Heun. Geb. M. 8.—.
38 **Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung I. Teil** von E Grimsehl. Geb M. 6.—
40 **Mathematische Optik** von J. Classen. Geb M 6 —.
41 **Theorie der Elektrizitat und des Magnetismus I. Teil: Elektrostatik und Elektrokinetik** von J. Classen. Geb M 5 —.
42 **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus II. Teil: Magnetismus u. Elektromagnetismus** von J Classen. Geb M 7.—
44 **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen II. Teil** von Viktor Kommerell und Karl Kommerell 2 Aufl. Geb M 5 80
45 **Niedere Analysis II. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen** von Herm. Schubert 2 Aufl Geb. M. 4 80
46 **Thetafunktionen und hyperelliptische Funktionen** v E Landtfriedt Geb. M. 4.50.
48 **Thermodynamik II. Teil** von W. Voigt Geb. M. 10 —
49 **Nichteuklidische Geometrie** von H. Liebmann 2. Aufl Geb M 7.50.
51 **Liniengeometrie mit Anwendungen II. Teil** von Konrad Zindler. Geb. M 8 —.
54 **Analytische Geometrie auf der Kugel** von Rich. Heger. Geb. M. 4 40.
55 **Gruppen- und Substitutionentheorie** von Eugen Netto. Geb. M 5 20.
56 **Spezielle ebene Kurven** von Heinrich Wieleitner. Geb. M. 12 —.
57 **Komplex-Symbolik** v. Roland Weitzenbock Geb. M 4.80.
58 **Theorie des Potentials u. der Kugelfunktionen I. Teil** von A. Wangerin. Geb M 7 60.
61 **Elliptische Funktionen I. Teil: Theorie der elliptischen Integrale; Umkehrproblem** von Karl Boehm. Geb. M. 6.—
62 **Spezielle Flachen und Theorie der Strahlensysteme** von Vikt. Kommerell und Karl Kommerell Geb. M. 6 —.
63 **Geschichte der Mathematik II. Teil:** Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts I Hälfte: Arithmetik, Algebra, Analysis von H. Wieleitner Geb. M. 6.50 Der Schlußband erscheint Ende 1920
65 **Darstellende Geometrie I. Teil** von Theod Schmid 2 Aufl. Geb M. 14.—. Der Schlußband erscheint Ende 1920.

Auf die Bände 3 und 65 gelangt ein Verleger-Teuerungszuschlag von 50%, auf alle anderen ein solcher von 100% zur Anrechnung.

Date Due
